Iranian Journal of Irrigation and Drainage
No. 4, Vol. 11, Oct.-Nov. 2017, p. 517-527

نشریه آبیاری و زهکشی ایران
شماره4، جلد 11، مهر - آبان 1396، ص. 527-517

# کاربرد روش تسریع به منظور بهبود هم‌گرایی حل‌گرهای غیرخطی در حل معادله ریچاردز به روش حجم محدود

گلاره فراهی[1]، سعیدرضا خداشناس[2*]، امین علیزاده[3] و علی نقی ضیایی[4]

تاریخ دریافت: 1395/7/27 تاریخ پذیرش: 1395/11/2

## چکیده

حل معادله ریچاردز با بکارگیری از روش ضمنی حجم محدود منجر به تولید یک سیستم معادلات غیرخطی شده که دقت حل آن تابعی از نوع روش حل معادلات غیرخطی است. روش تکراری پیکارد یک روش قوی، در عین حال با سرعت هم‌گرایی خطی است، روش نیوتن رافسون، درصورتی‌که حدس اولیه در بازه‌ای مناسب قرار بگیرد علاوه بر دقت بالا، از سرعت هم‌گرایی بیش‌تری برخوردار است.با این حال به‌دلیل حجم قابل توجه محاسبات ناشی از حل ماتریس ژاکوبین و مشتقات جزیی در هر تکرار، معمولا به عنوان یک روش محبوب در حل سیستم‌های غیرخطی در فضای بیش از یک بعد درنظر گرفته نمی‌شود. در این مقاله، به منظور کاهش حجم و زمان محاسبات تلفیق دو الگوریتم پیکارد و شبه‌نیوتن به همراه روش تسریع برویدن معرفی شد. ازاین‌رو هدف از این تحقیق در ابتدا مطالعه تاثیر تلفیق الگوریتم‌های خطی‌سازی به‌همراه روش سریع برویدن بر زمان شبیه‌سازی معادله دو بعدی ریچاردز و سپس بررسی دقت روش عددی حجم محدود ضمنی در حل این معادله است. بدین منظور از پارامترهای هیدرولیکی یک نمونه خاک لومی رسی شنی با شرایط مرزی هد ثابت و رطوبت اولیه معادل با رطوبت باقی‌مانده، استفاده شد. مقایسه نتایج سه الگوریتم خطی‌سازی نشان داد، در صورتی‌که شاخص هم‌گرایی تغییر حلقه الگوریتم پیکارد به الگوریتم شبه‌نیوتن درست انتخاب شود، روش پیکارد/شبه‌نیوتن تاثیر قابل توجهی در کاهش زمان محاسبات نسبت به روش پیکارد دارد. درصورتی‌که اعمال روش برویدن تاثیر چشم‌گیری در کاهش زمان از خود نشان نمی‌دهد. در ادامه نتایج مدل عددی با استفاده از الگوریتم پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن در قالب نیم‌رخ مکش با حل تحلیلی معادله ریچاردز به روش واریک، مقایسه شد. نتایج نشان داد که روش عددی حجم محدود ضمنی، از دقت بالایی در برآورد تغییرات مکش در خاک برخوردار است، به‌طوری‌که خطای جذر میانگین مربعات مدل عددی در مقایسه با حل تحلیلی واریک معادل 0/0001 سانتی‌متر محاسبه شد.

**واژه‌های کلیدی:** حلگرهای غیرخطی، روش حجم محدود، معادله ریچاردز

## مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسایل مطرح در علوم مهندسی خاک، کشاورزی، مهندسی محیط زیست و هیدرولوژی کاربردی و تحلیلی، شبیه‌سازی حرکت آب در محیط غیراشباع خاک است. بهترین روش جهت مدل‌سازی حرکت جریان آب در محیط خاک غیراشباع، حل معادله ریچاردز است. معادله ریچاردز یک معادله غیرخطی بوده که حل تحلیلی آن به‌جز در موارد بسیار ساده شده موجود نمی‌باشد. از این‌رو در طی سی سال گذشته از روش‌های مختلف عددی تفاضل محدود، المان محدود و حجم محدود برای حل این معادله استفاده شده است. پندی و هویاکورن برای مدل‌سازی معادله ریچاردز از روش ضمنی تفاضل محدود استفاده کردند و برای حل معادله غیرخطی، الگوریتم پیکارد را بکار بردند. آن‌ها مشکل اصلی در استفاده از روش تفاضل محدود برای حل معادله ریچاردز را عدم بقای جرم درگره‌ها بیان کردند (Pandy and Huyakorn., 2004). عموم روش‌های عددی تفاضل محدود و المان محدود که برای حل معادله ریچاردز ارایه شده‌اند در گرادیان‌های تند، تولید پخشیدگی و نوساندر نتایج مدل می‌کنند(Manzini and Ferraris., 2004). فون و همکاران نشان دادند که برای حرکت جریان آب در خاکی مرطوب، در صورت استفاده از روش‌های عددی المان محدود و تفاضل محدود، به‌منظورحفظ بقای جرم و جلوگیری از تولید نوسان در نتایج، ابعاد شبکه محاسباتی بایستی به اندازه $dz=0/025$ m کوچک شوند، ولی حتی در این شرایط نیز نتایج کاملا بر حل تحلیلی مدل منطبق نشدند

1- دانشجوی دکتری، گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه فردوسی مشهد
2- استاد گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه فردوسی مشهد
3- استاد گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه فردوسی مشهد
4- دانشیار گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه فردوسی مشهد
(* - نویسنده مسئول: Email:khodashenas@ferdowsi.um.ac.ir)

(Phoon et al., 2007). صادق‌زاده پیشنهاد کرد که برای رفع تولید پخشیدگی و نوسان در حـل معادلـه ریچـاردز در صـورت اسـتفاده از روش‌های عددی المان محدود و تفاضل محدود تحـت شـرایط ورود جریان آب به خاک خشک که گرادیان جریان تند است، از تلفیـق دو فرم مکش در محدوده اشباع و فرم ترکیبی معادله ریچاردز در محدوده غیراشباع خاک استفاده شود. نتایج مدل وی نشان داد که این نحـوه تلفیق می‌تواند به تولید نتایجی بدون نوسان و عـاری از پخشـیدگی کمک کند (SadeghZadeh., 2011). با این حال هنگ و همکـاران بیان کردند که بعضی از معادلات مانند معادلـه ریچـاردز بـه قـدری غیرخطی‌اند که در صورت استفاده از روش‌های عددی المان محـدود حتی درگام‌های مکانی بسیار کوچک نیز، منجر به از بین بردن کامل خطای توازن جرم نمی‌شوند (Huange et al., 1998). روش حجـم محدود اولین بار توسط مهندسین برای مطالعه پدیـده‌هـای فیزیکـی پیچیده که بقا کمیت‌هایی مانند انرژی، جرم و .... بایستی توسط روش حل لحاظ شود، ابداع شد. یکی از مزیـت‌هـای روش حجـم محـدود امکان استفاده از آن در بازه وسیعی از اندازه شـبکه‌هـای محاسـباتی است. به‌دلیل برخوردار بودن این روش از بقا جرم، بکارگیری آن برای حل ترکیبی معادله ریچاردز توسط محققین پیشنهاد شده است. علاوه بر این ارایه نتایج قابل‌قبول بدون تولید نوسان و پخشیدگی در شرایط جبهه رطوبتی تند یکی دیگر از دلایل محبوبیت ایـن روش اسـت. از مزایای کلی روش حجم محدود نسبت به روش‌های تفاضل محدود و المان محدود، علاوه بر سادگی، استخراج یک فرمول کلی برای حالت چندبعدی تنها با استفاده از محاسبه شارهای عبوری از سطوح حجـم کنترل و برای آن بعد خاص، است. تعداد معـدودی از محققـان روش حجم محدود را برای حل معادله ریچادرز بکار برده‌اند، که می‌توان به پـژوهش‌هـای (Manzini and Ferris., 2004) و (Misiats and Lipnikov., 2013) اشاره کرد. برای جداسازی زمـانی معادلـه از دو الگوریتم صریح و یا ضمنی استفاده می‌شود. یکی از مشـکلات روش صریح در حل فرم ترکیبی معادله ریچادز تحت شرایط اشـباع خـاک، میل کردن ضریب ظرفیت هیدرولیکی (C) در معادله به سـمت عـدد صفر است. بنابراین استفاده از این روش تنهـا بـه شـرایط غیراشـباع محدود می‌شود (Caviedes-Voullieme et al., 2013). عـلاوه بـر این، روش صریح برخلاف روش ضمنی همواره پایدار نیست. با توجه به پایدار بودن بی‌قید و شرط روش ضمنی می‌توان برای کاهش زمان محاسبه از گام‌های زمانی بزرگ‌تری نسبت به روش صریح اسـتفاده کرد و همچنان به نتایج دقیقی دست پیدا کـرد. بنـابراین اسـتفاده از الگوریتم ضمنی برای حل معادله ریچاردز در شرایط اشباع و غیراشباع با استفاده از روش حجم محدود، پیشنهاد می‌شود. بکارگیری الگوریتم ضمنی منجر به تولید یک سیستم معادلات جبری غیرخطی می‌شـود که با روش‌های تکراری نیوتن - رافسـون (Gradient method) یـا پیکارد (Fixed point) قابل حل است. لهمن و اکر و پانی‌کنی و پوتی با مقایسه دو روش پیکارد و نیوتن در حل معادله ریچـاردز، بـه ازای انواع شرایط مرزی و اولیه، از جمله: حرکت جریان آب در شرایط پایدار و انتقالی، نفوذ آب به خاک خشک و عمیق، زهکشی از خاک و صعود آب تحت نیروی مویینگی در اثر تبخیر از سطح خاک، نشان دادند که تحت شرایط نفوذ در خاک عمیق، شرایط مرزی متغیر، خاک‌هایی که توابع هیدرولیکی غیرخطی بالایی دارند (خاک‌های درشت بافـت کـه ضـرایب $\alpha$ و $\eta$ بزرگـی در مـدل هیـدرولیکی ونگنـوختن (van Genuchten, 1980) و معلم (Mualem, 1976) دارند) و در محـل برخورد دو لایه اشباع و غیراشـباع، روش پیکـارد از رانـدمان بـالایی برخوردار نیست، به طوری‌که منجر به واگرایی مدل می‌شود (Lehman and walker., 1998., Paniconi and Putti., 1994). درحالی‌که روش نیوتن در صورتی‌که حـدس اولیـه در بـازه مناسبی قرار بگیرد قادر به حل دقیق معادله ریچـاردز تحـت شـرایط مذکور است (Paniconi and Putti., 1994). علاوه بر این پنـدی و همکاران و دوریک نشان دادند که در فضـای محاسـباتی نـاهمگن، روش نیوتن از توانایی بالایی در حل این معادلـه برخـوردار اسـت، در صورتی‌که در این شرایط روش پیکارد عملکرد ضعیفی از خود نشـان می‌دهد (Panday et al.,199; Durick, 2004). یکی دیگر از نقاط قوت روش نیوتن نرخ سرعت هم‌گرایی بـالای آن نسـبت بـه روش پیکارد است. با این حال روش نیوتن از نقطه ضعف‌هایی نیز برخوردار است. از جمله می‌توان به حساسیت بالای آن بـه انتخـاب نامناسـب حدس اولیه اشاره کـرد، بـه‌طـوری‌کـه حـدس اولیـه مـی‌بایسـت در محدوده‌ای نزدیک به جواب مساله قرار بگیرد. در غیر این‌صـورت در بسیاری از موارد، انتخاب نادرست حدس اولیه ممکن است منجـر بـه عدم هم‌گرایی و یا هم‌گرایی به جواب غیرفیزیکـی شـود (Tocci et al., 1998)، درحـالی‌کـه روش پیکـارد نسـبت بـه حـدس اولیـه از حساسـیت بـه مراتـب کـم‌تـری برخـوردار اسـت (Mehl., 2006). همچنین، برای تولید ماتریس ژاکوبین در الگوریتم نیوتن، نیاز به حل تحلیلی مشتقات جزیی برای کلیه سلول‌های محاسـباتی اسـت. حـل تحلیلی مشتقات جزیی معادله ریچاردز در قالب یک بعـد قابـل اجـرا است، در صورتی‌که با افزایش ابعاد معادله، حل ایـن مشـتقات بسـیار پیچیده و منجر به افزایش حجم محاسبات می‌شود. تحت این شرایط حل معکوس ماتریس ژاکوبین و مشتقات جزیی، اگر منجر به واگرایی سیستم نشود، بسیار زمان‌بر خواهد بـود. بـویلاک و همکـاران بیـان کردند که حتی با توجه به محدودیت‌های فوق، روش نیوتن یکـی از مفیدترین الگوریتم‌ها بـرای حـل معـادلات غیرخطـی اسـت، کـه در صورت رفع محدودیت‌های ذکر شده، این روش نسبت به روش پیکارد در الویت قرار مـی‌گیـرد (Bevilacqua et al., 2011 ). بـرای رفـع مشکل عدم هم‌گرایی درصورت نامناسب بودن حدس اولیه می‌توان از تلفیق دو روش پیکارد و نیوتن استفاده کرد. این ایـده بـرای کـاهش حساسـیت روش نیـوتن بـه دقـت حـدس اولیـه، اولـین بـار توسـط

(Paniconi et al.,1991) پیشنهاد شد و به صورت مستمر توسط سایر محققین با سعی در افزایش سرعت هم‌گرایی و کاهش زمان محاسبات، بکار گرفته شد. باردن و فارز به منظور کاهش پیچیدگی در حل تحلیلی مشتقات جزئی معادله غیرخطی ریچاردز، روش شبه‌نیوتن را معرفی کردند. آن‌ها در این روش از متد تفاضل محدود برای حل مشتقات استفاده کردند و در ادامه برای کاهش محاسبه ماتریس ژاکوبین به یک تکرار در هر گام زمانی، بکارگیری از روش تسریع برویدن را پیشنهاد نمودند .(Burden and Faires., 2011)

روش تسریع برویدن (Broyden., 1965) یکی از روش‌های توانمند و ساده برای کاهش محاسبه ماتریس ژاکوبین به تنها یک تکرار در هر گام زمانی است. تا به‌حال از این روش به منظور تسریع در حل دوبعدی معادله ریچاردز در قالب روش‌های عددی تفاضل محدود (Walker et al., 2010)، المان محدود ترکیبی ( Fassino and Manzini., 1998) و حجم محدود ( Bevilacqua et al., 2011) استفاده شده است. والکر و همکاران تاثیر روش تسریع برویدن بر حل دوبعدی معادله ریچاردز را برای مدل‌سازی نفوذ آب در چهار نوع خاک مختلف به ترتیب نیومکزیکو، لوم‌شنی، لومو خاک درهم، به ازای رطوبت اولیه متوسط، مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که در هر چهار حالت، روش برویدن منجر به کاهش زمان محاسبات و تعداد تکرارها نسبت به روش پیکارد شد (Walker et al., 2010). بویلاک و همکاران نشان دادند که در شرایط نفوذ آب در خاک این روش می‌تواند به عنوان ابزاری مفید جهت کاهش زمان مدل‌سازی، مورد استفاده قرار گیرد، درحالی‌که تحت شرایط صعود آب در خاک، این روش تاثیر منفی بر زمان محاسبات دارد Bevilacqua et al., (2011). با توجه به توانایی‌های روش عددی حجم محدود در تولید نتایج خالی از نوسان به‌همراه حفظ بقای جرم، در مقاله حاضر از این روش برای حل معادله ریچاردز در فضای دوبعدی استفاده شد. علاوه بر این، به منظور کاهش حساسیت الگوریتم نیوتن به حدس اولیه و تسریع در اجرای مدل از تلفیق دو الگوریتم شبه‌نیوتن و پیکارد به همراه روش تسریع برویدن بکار گرفته شد و سپس تاثیر این روش از حل معادله ریچاردز بر دقت و زمان اجرای برنامه مورد بررسی قرار گرفت.

## مواد و روش‌ها

### معادله ریچاردز

معادله ریچاردز از ادغام دو معادله دارسی و پیوستگی حاصل شده است. این معادله در قالب فرم ترکیبی به صورت رابطه 1 تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\nabla.\left[\boldsymbol{K}(h)\nabla(h+z)\right] \tag{1}$$

که در آن $\nabla$ گرادیان یک عبارت و در فضای سه‌بعدی بصورت $\nabla()=\left(\frac{\partial()}{\partial x},\frac{\partial()}{\partial y},\frac{\partial()}{\partial z}\right)$، $\theta$ محتوای حجمی آب (-)، $h$ هد فشار (m)، K(h) ضریب هدایت هیدرولیکی (m/s)، z فاصله از خط مبنا (m) و t زمان (s) می‌باشند. معادله فوق توصیفی از حرکت جریان آب در یک محیط غیراشباع است. برای تخمین پارامترهای هیدرولیکی خاک روابط متعددی ارایه شده است. به‌دلیل کاربرد بالای مدل هیدرولیکی ونگنوختن (1980) و معلم (1976) که به اختصار به صورت مدل (MG) نشان داده می‌شود، در این مقاله نیز از این روش استفاده شد. در روش (MG) رابطه بین پارامترهای مکش، رطوبت و هدایت هیدرولیکی به صورت رابطه 2 و 3 تعریف می‌شود:

$$\theta(h)=\begin{cases}\theta_r+\dfrac{\theta_s-\theta_r}{\left[1+|\alpha h|^{\eta}\right]^{m}} & h<0\\ \theta_s & h\geq 0\end{cases} \tag{2}$$

$$K(h)=K_sS_e^{\,l}\left[1-(1-S_e^{\frac{1}{m}})^{m}\right]^2 \tag{3}$$

که در آن :

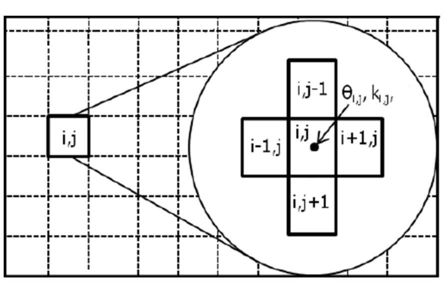
$$m=1-\frac{1}{\eta}\quad,\quad \eta>1 \tag{4}$$

$$S_e=\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r} \tag{5}$$

که در آن $\theta_r$ رطوبت باقی مانده خاک (-)، $\theta_s$ رطوبت اشباع خاک (-)، $\alpha$ معکوس فشار ورود هوا در مدل MG، $\eta$ پارامتر توزیع اندازه حفرات خاک در مدل MG و $l$ پارامتر آزاد که برای بسیاری از خاک ها برابر با 0/5 در نظر گرفته می‌شود.

### قالب حجم محدود

به منظور حل معادله ریچاردز در فضای دوبعدی با استفاده از روش حجم محدود لازم به شبکه‌بندی بازه مورد مطالعه به صورت شکل 1 و سپس انتگرال‌گیری از معادله برای هر یک از حجم‌های کنترل است.




**شکل 1- موقعیت حجم کنترل در شرایط دوبعدی**

با انتگرال‌گیری از معادله 1 بر روی حجم کنترل، معادله ریچاردز در قالب حجم محدود بصورت رابطه 6 جداسازی می‌شود.

$$\frac{d}{dt}\iiint \theta dV = \iiint_V \nabla\left[\boldsymbol{K}\nabla(h+z)\right]dV \tag{6}$$

بار دیگر با اعمال قضیه گوس می‌توان معادله فوق را بصورت رابطه 7 تبدیل کرد.

$$\frac{d}{dt}\iiint \theta dV = \iint_V \left[\boldsymbol{Kn}\nabla(h+z)\right] \tag{7}$$

در این رابطه $\mathbf{n}$ بردار عمود بر سطح است که در حالت دوبعدی (در جهات x و z) بصورت $\boldsymbol{n}=(\pm1,\pm1,0)$ تعریف می‌شود. در صورت در نظر گرفتن جهت مثبت به سمت محور بالای zها و به سمت راست محور xها معادله حجم محدود به صورت رابطه 8 نوشته خواهد شد:

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t} = \frac{1}{|V|}\sum_{\omega=1}^{N} F \tag{8}$$

در رابطه فوق $F$ عبارات شار که از معادله 9 بدست می‌آیند، N تعداد سطح‌های حجم محدود و $V=\Delta A\delta z$ می‌باشند.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int \boldsymbol{K}_\omega \boldsymbol{n}^1\nabla(h+z)dA = -K_{i+1/2}\frac{\delta(h+z)_{i+1/2}}{\delta z}\Delta A_x\\
F_2 &= \int \boldsymbol{K}_\omega \boldsymbol{n}^2\nabla(h+z)dA = K_{i-1/2}\frac{\delta(h+z)_{i-1/2}}{\delta z}\Delta A_x\\
F_3 &= \int \boldsymbol{K}_\omega \boldsymbol{n}^3\nabla(h)dA = K_{j+1/2}\frac{\delta(h)_{j+1/2}}{\delta x}\Delta A_y\\
F_3 &= \int \boldsymbol{K}_\omega \boldsymbol{n}^4\nabla(h)dA = -K_{j+1/2}\frac{\delta(h)_{j-1/2}}{\delta x}\Delta A_y
\end{aligned} \tag{9}$$

که در معادله (9) $\Delta A_x$ و $\Delta A_z$ به ترتیب مساحت سطح مشترک سلول (i,j) در سطح مشترک‌های $i\pm1/2$ و $j\pm1/2$ می‌باشند. در صورتی‌که برای سلول در نظر گرفته شده $\partial x=\partial z$ باشد، این دو مساحت در مختصات دکارتی با هم برابر خواهند بود. با جاگذاری معادله 9 در معادله 8 و محاسبه هدایت هیدرولیکی معادل هر 4 وجه با استفاده از روش حسابی، معادله نهایی به صورت رابطه 10 بدست می‌آید:

$$\frac{\partial\tilde{\theta}_i}{\partial t} = \left[\begin{array}{l}
K_{i+1/2}\left(\frac{(h+z)_{i+1}-(h+z)_i}{\delta z^2}\right)\\
-K_{i-1/2}\left(\frac{(h+z)_{i}-(h+z)_{i-1}}{\delta z^2}\right)\\
+K_{j+1/2}\left(\frac{(h)_{j+1}-(h)_j}{\delta z^2}\right)\\
-K_{j-1/2}\left(\frac{(h)_{j}-(h)_{j-1}}{\delta z^2}\right)
\end{array}\right] \tag{10}$$

معادله فوق فرم جداسازی مکانی معادله ترکیبی ریچاردز با استفاده از روش عددی حجم محدود است. با بکارگیری روش ضمنی به منظور جداسازی زمانی معادله ریچاردز، معادله فوق به صورت رابطه 11 تبدیل می‌شود:

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1}-\theta_{i,j}^{n}}{dt} = \left[\begin{array}{l}
K_{i+1/2,j}^{n+1}\left(\frac{(h+z)_{i+1,j}-(h+z)_{i,j}}{\delta z^2}+\frac{1}{\partial z}\right)^{n+1}\\
-K_{i-1/2,j}^{n+1}\left(\frac{(h+z)_{i,j}-(h+z)_{i-1,j}}{\delta z^2}+\frac{1}{\partial z}\right)^{n+1}\\
+K_{i,j+1/2}^{n+1}\left(\frac{(h)_{i,j+1}-(h)_{i,j}}{\delta z^2}\right)^{n+1}\\
-K_{i,j-1/2}^{n+1}\left(\frac{(h)_{i,j}-(h)_{i,j-1}}{\delta z^2}\right)^{n+1}
\end{array}\right] \tag{11}$$

## شرایط مرزی

در شرایطی که دبی ورودی به خاک، کنترل کننده شرایط مرزی باشد، شرایط مرزی نیومن شکل می‌گیرد. بطور مثال در صورتی‌که مرز بالایی فضای محاسباتی دارای شار باشد، معادله 11 بصورت معادله 12 خواهد بود:

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1}-\theta_{i,j}^{n}}{dt} = \left[\begin{array}{l}
K_{i+1/2,j}\left(\frac{(h+z)_{i+1,j}-(h+z)_{i,j}}{\delta z^2}+\frac{1}{\partial z}\right)^{n+1}\\
+q_{in}^{n+1}+K_{i,j+1/2}\left(\frac{(h)_{i,j+1}-(h)_{i,j}}{\delta z^2}\right)^{n+1}\\
-K_{i,j-1/2}\left(\frac{(h)_{i,j}-(h)_{i,j-1}}{\delta z^2}\right)^{n+1}
\end{array}\right] \tag{12}$$

که در آن $q_{in}$ دبی ورودی به مرز بالادست است درصورتی‌که مرزهای حوزه توسط هد کنترل شود در این صورت شرایط مرزی

دریشله شکل می‌گیرد. که در این صورت معادله 11 به صورت معادله 13 بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1}-\theta_{i,j}^{n}}{dt}=\begin{bmatrix} K_{i+1/2,j}^{n+1}\left(\frac{(h+z)_{i+1,j}^{n+1}-(h+z)_{i,j}^{n+1}}{\delta z^{2}}\right) \\ -K_{i-1/2,j}^{n+1}\left(\frac{(h)_{i,j}^{n+1}-h_{0}^{n+1}}{\frac{\delta z^{2}}{2}}-\frac{1}{\partial z}\right) \\ +K_{i,j+1/2}^{n+1}\left(\frac{(h)_{i,j+1}^{n+1}-(h)_{i,j}^{n+1}}{\delta z^{2}}\right) \\ -K_{i,j-1/2}^{n+1}\left(\frac{(h)_{i,j\ i,j}^{n+1}-(h)_{i,j-1}^{n+1}}{\delta z^{2}}\right) \end{bmatrix} \tag{13}$$

که در آن $h_0$ هد فشاری بر مرز بالادست است.

## روش‌های حل معادله غیرخطی ریچاردز

برای حل معادله غیرخطی ریچاردز، به منظور بهبود حدس اولیه در روش شبه‌نیوتن، تلفیق دو روش پیکارد و شبه‌نیوتن پیشنهاد شد. در ادامه از روش برویدن برای جلوگیری از محاسبه ژاکوبین در هر تکرار، استفاده می‌شود. الگوریتم حل معادله طبق تصحیحات فوق به صورت گام‌های زیر است:

الگوریتم تلفیق پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن

فرض یک مقدار $h$ (مکش) برای کلیه سلول‌های فضای محاسباتی، به عنوان حدس اولیه

شروع حلقه پیکارد تا زمانی‌که $\left|h_{i,j}^{n+1,p+1}-h_{i,j}^{n+1,p}\right|<\varepsilon_p$

به ازای مقدار $h$ بدست آمده در آخرین تکرار در حلقه پیکارد، اولین تکرار در حلقه نیوتن آغاز می‌شود

محاسبه ژاکوبین با استفاده از روش تفاضل محدود

محاسبه $h$ در تکرار جدید در حلقه شبه‌نیوتن

تعیین میزان هم‌گرایی با استفاده از رابطه

$$\left(\sum_{i=1,j=1}^{n,m}\left|dh_{i,j}\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon_{N}$$

در صورت عدم برقراری هم‌گرایی روش برویدن در حلقه نیوتن اعمال می‌شود

محاسبه بردار مجهولات در هر سلول در حلقه برویدن تا زمان برقراری هم‌گرایی

در صورت برقراری هم‌گرایی، شروع محاسبات در گام زمانی $t=t+dt$

در الگوریتم فوق، $\varepsilon_p$ و $\varepsilon_N$ به ترتیب شاخص‌های هم‌گرایی در حلقه‌های پیکارد و شبه‌نیوتن می‌باشند. نحوه اجرای برنامه طبق گام‌های بالا به منظور محاسبه بردار مجهولات ($h$) برای کلیه سلول‌های فضای محاسباتی در هر گام زمانی به‌طوری است که ابتدا در حلقه داخلی، تکرارهای اولیه طبق روش خطی‌سازی پیکارد شروع شده تا زمانی‌که تفاوت مجهول ($h$) بین هر دو تکرار از شاخص هم‌گرایی در حلقه پیکارد ($\varepsilon_p$) کم‌تر شود. سپس محاسبات در حلقه نیوتن طبق مجهول ($h$) بدست آمده در آخرین تکرار حلقه پیکارد، شروع می‌شود. بطوری‌که ابتدا مشتقات جزیی و سپس معکوس ماتریس ژاکوبین محاسبه شده و در ادامه بردار مجهولات (h) برای کلیه سلول‌ها بدست می‌آیند. در صورت عدم برقراری هم‌گرایی در اولین تکرار نیوتن، در تکرار بعدی محاسبه ماتریس معکوس ژاکوبین متوقف شده و روش برویدن به ماتریس ژاکوبین محاسبه شده در تکرار اول اعمال می‌شود و بردار مجهولات به‌هنگام سازی می‌شوند. این عمل تا زمان هم‌گرایی بردار مجهولات به جواب ادامه پیدا خواهد کرد. این روش اجازه می‌دهد که تعداد فاکتوریل کردن ژاکوبین که بیش‌ترین زمان محاسبات را در بر می‌گیرد، تنها به یک بار در هر گام زمانی کاهش یابد. در صورت اجرای مدل با استفاده از الگوریتم پیکارد/ شبه‌نیوتن، کلیه مراحل فوق با حذف گام‌های 7 و 8 انجام می‌شوند.

## صحت‌سنجی مدل

یکی از روش‌های معتبر جهت بررسی دقت مدل در شبیه‌سازی جریان آب در خاک، مقایسه نتایج مدل با نتایج حاصل از حل تحلیلی معادله است. حل تحلیلی معادله ریچاردز توسط محققین مختلفی از جمله (Philip., 1967; Warrick et al., 1985; Broadbridge and Rogers., 1990; Manzini and Ferraris., 2004) ارایه شده است. در این میان حل تحلیلی معادله ریچاردز توسط واریک و همکاران (1985) به عنوان معیاری جهت صحت‌سنجی مدل عددی معادله ریچاردز، توسط محققینی مانند (Caviedes-Voullieme et al., 2013 ; Phoon et al., 2007) مورد استفاده قرارگرفته است. فون و همکاران به منظور بررسی دقت نتایج دو روش عددی المان محدود و تفاضل محدود پیشنهادی خود در حل یک بعدی معادله ریچاردز، از حل تحلیلی این معادله به روش واریک و همکاران (1985) به عنوان مبنای مقایسه استفاده کردند(Phoon et al., 2007) . بدین منظور نامبردگان ابتدا یک نمونه خاک لوم رسی- شنی را از بانک اطلاعاتی خاک (UNSODA) انتخاب و پارامترهای هیدرولیکی مدل (MG) را به صورت $\theta_s$=0/363، $\theta_r$=0/186، $\alpha$=0/01 $cm^{-1}$، $\eta$=1/53 و $K_s$=0/0001 cm/s برآورد کردند. سپس شرایط اولیه و مرزی مشخصی بر ستون یک بعدی خاک اعمال کردند. بطوری‌که ارتفاع خاک معادل 1($L_z$) متر و مکش اولیه معادل 8- متر به عنوان شرایط اولیه ستون خاک در نظر گرفته شد. شرایط مرزی در بالادست ستون خاک، بار هیدرولیک ثابت و معادل صفر ((h(z=0,t)) و در پایین دست، معادل 8- متر((h(z=$L_z$,t)) فرض شد.در ادامه فون و همکاران به ازای

شرایط تعریف شده، مدل‌های پیشنهادی خود و مدل تحلیلی واریک و همکاران (Warrick et al., 1985) را حل کرده و سپس نتایج را با یکدیگر مقایسه نمودند (Phoone et al., 2007). نامبردگان نشان دادند که ابعاد محاسباتی درشت به ازای هر دو روش عددی المان محدود و تفاضل محدود منجر به تولید نتایجی همراه با نوسان می‌شود. در ادامه کاویداس و همکاران مدلی یک بعدی از دو فرم ترکیبی و رطوبتی معادله ریچاردز با استفاده از روش عددی حجم محدود ساختند و به ازای بازه وسیعی از نوع خاک و شرایط مرزی و اولیه، تاثیر انواع گام‌های زمانی (dt) و فواصل مکانی (dz) را بر عملکرد دو مدل مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد که بطور کلی مدل عددی حجم محدود تابعی از گام‌های زمانی کوچک نیست، بطوری‌که به ازای گام‌های زمانی 500 ثانیه نتایج مدل منطبق بر نتایج مدل به ازای گام زمانی 1 ثانیه است، ولی عملکرد مدل نسبت به تغییر ابعاد شبکه‌های محاسباتی حساس می‌باشد و این حساسیت با کاهش مکش اولیه خاک افزایش می‌یابد (Caviedes-Voullieme et al., 2013). با این‌حال حتی در شرایطی که فواصل مکانی درشت باشند، نتایج مدل عددی کاملا عاری از نوسان بود. برای بررسی ورود جریان آب به یک ستون خاک با رطوبت اولیه معادل رطوبت باقی‌مانده، نامبردگان مدل خود را به ازای داده‌های تعریف شده توسط فون و همکاران (Phoon et al., 2007) برای نمونه خاک شنی-لومی، اجرا کردند و با نتایج حل تحلیلی واریک و همکاران (Warrick et al., 1985) مقایسه کردند. آن‌ها نشان دادند که تحت این شرایط بهترین نتایج که کم‌ترین زمان محاسبات را نیز به خود اختصاص می‌دهد، در گام زمانی 50 ثانیه و فواصل مکانی 0/02 متر بدست می‌آید. در این مقاله نیز با بکارگیری از اطلاعات فون و همکاران (Phoon et al., 2007) و با استفاده از فاصله مکانی و گام زمانی پیشنهاد شده در مقاله کاویداس و همکاران (Caviedes-Voullieme et al., 2013)، معادله دوبعدی ریچادرز با استفاده از حل عددی پیشنهادی (معادله 11)، با استفاده از سه الگوریتم خطی‌سازی به ترتیب پیکارد، پیکارد/ شبه‌نیوتن و پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن مدل‌سازی شد و در ادامه، نتایج مدل با حل تحلیلی واریک، در قالب نیم‌رخ مکش در ستون خاک در زمان11700 ثانیه از شروع محاسبات، مقایسه شد. خاطر نشان می‌سازد که در مسئله مطرح شده توسط فون و همکاران (Phoon et al., 2007)، نفوذ آب به صورت یک‌بعدی و در جهت عمود فرض شده است و در این مقاله مسئله مذکور به فضای دوبعدی تعمیم پیدا کرد. تحت این شرایط در این مقاله، عرض ستون خاک نیز مشابه ارتفاع آن معادل 1 متر ($L_X$=1m) در نظر گرفته شد. مرزهای سمت چپ و راست ستون خاک غیرقابل نفوذ فرض شدند، از این جهت طبق معادله 12، شار ورودی معادل صفر برای مرزها تعریف شد. پارامترهای خاک، شرایط مرزی و شرایط اولیه تعریف شده توسط فون و همکاران (Phoon et al., 2007) به همراه شرایط تعمیم داده شده در این مقاله برای فضای محاسباتی دوبعدی خاک، در جدول 1جمع‌بندی شده است.

**جدول 1- پارامترهای ورودی به مدل بر اساس داده‌های فون و همکاران (Phoon et al., 2007)**

| پارامترهای هیدرولیکی خاک | | شرایط مرزی و اولیه | ابعاد سیستم (cm) |
|---|---|---|---|
| 0/363 | $\theta_s$ | $(\frac{\partial h}{\partial x}=0,t>0)$ | $(x,z)\in[0,L_x]\times[0,L_Z]$ |
| 0/186 | $\theta_r$ | $z=0,h(x,0,t>0)=0$ | $L_X$=1m |
| 0/01 | $\alpha\,(cm^{-1})$ | $z=L_z,h(x,0,t>0)=\frac{\partial h}{\partial z}=0$ | $L_Z$=1m |
| 0/0001 | $K_s\,(cm/s)$ | $h(x,z,t=0)=-800cm$ | - |
| 1/53 | $\hat{\eta}$ | $x=0,\frac{\partial h}{\partial x}=0$ | - |

کلیه مسایل عددی انجام شده در این مقاله، حاصل یک کد نوشته شده توسط نویسنده اول، در محیط متلب می‌باشد که بر روی یک پردازنده Core (i5-4690) با سرعت 3/9 گیگاهرتز، اجرا گردیده است.

## نتایج و بحث

### بررسی انواع الگوریتم‌های خطی‌سازی

در روش پیکارد/ شبه‌نیوتن انتخاب یک شاخص هم‌گرایی($\varepsilon_p$) مناسب برای شروع حلقه شبه‌نیوتن بسیار مهم بوده و بر روی زمان و تعداد تکرارها تاثیر به سزایی دارد. تا به‌حال ($\varepsilon_p$) مشخصی به عنوان بهترین مقدار جهت تغییر حلقه پیکارد به شبه‌نیوتن معرفی نشده است. لهمن و آکرر پیشنهاد کردند که بهترین نتایج زمانی بدست می‌آید که در حلقه پیکارد تنها یک تکرار انجام شود (Lehmann and Ackerer., 1998)، در صورتی‌که (Tracy., 2010) 20 تکرار را برای حلقه پیکارد در هر گام زمانی، انتخاب مناسبی جهت تعیین حدس اولیه در حلقه نیوتن معرفی می‌کند. بویلاک و همکاران انتخاب

یک شاخص هم‌گرایی ($\varepsilon_p$) مناسب در تغییر حلقه پیکارد به الگوریتم شبه‌نیوتن را پیشنهاد می‌کنند (Bevilacqua et al., 2010). از اینرو طبق نظر بویلاک و همکاران (Bevilacqua et al., 2010) در این مقاله نیز تاثیر انواع شاخص‌های هم‌گرایی بر زمان مدل‌سازی و تعداد تکرارها در هر گام زمانی طبق جدول 2 مورد بررسی قرار گرفت.

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش شاخص هم‌گرایی ($\varepsilon_p$) از 0/01 تا 500 بدلیل کاهش در تعداد کل تکرارهای حلقه پیکارد از عدد 1300 به 273، زمان محاسبات از 937 ثانیه به 251 ثانیه تقلیل می‌یابد.

**جدول 2- تعیین بهترین شاخص اطمینان جهت تغییر حلقه در زمان 11700ثانیه جهت مقایسه تعداد تکرارها در روش پیکارد و شبه‌نیوتن**

| تعدادکل تکرارهای روش پیکارد | تعدادکل تکرارهای روش شبه‌نیوتن | حداکثر تعداد تکرارهای روش شبه‌نیوتن در هر گام زمانی | حداکثر تعداد تکرارهای روش پیکارد در هر گام زمانی | زمان محاسبات | ($\varepsilon_p$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1300 | 235 | 1 | 12 | 937 | 0/01 |
| 1056 | 235 | 1 | 9 | 740 | 0/1 |
| 792 | 235 | 1 | 7 | 552 | 1 |
| 587 | 235 | 1 | 6 | 421 | 10 |
| 530 | 235 | 1 | 6 | 396 | 20 |
| 498 | 236 | 2 | 6 | 338 | 50 |
| 442 | 242 | 2 | 6 | 213 | 100 |
| 273 | 249 | 2 | 5 | 215 | 500 |
| 276 | 240 | 3 | 5 | 396 | 600 |

افزایش($\varepsilon_p$) باعث می‌شود که در هر گام زمانی به ازای تعداد تکرارهای کم‌تری، نتایج از حلقه پیکارد به شبه‌نیوتن انتقال یابد. بطوری‌که ملاحظه می‌شود در ($\varepsilon_p$) معادل با 0/01 حداکثر تعداد تکرارهای حلقه پیکارد در هر گام زمانی 12 عدد و در ($\varepsilon_p$) معادل 500، به 5 عدد کاهش پیدا می‌کند. مقایسه تعداد تکرارها در روش شبه‌نیوتن نشان می‌دهد که این روش برای رسیدن به جواب حداکثر 2 تکرار انجام می‌دهد. این اعداد خود نشانگر توانایی روش شبه‌نیوتن در هم‌گرایی سریع‌تر به جواب نسبت به روش پیکارد است. بالا بودن زمان محاسبات در روش پیکارد تنها به دلیل سرعت هم‌گرایی خطی آن است که منجر به تولید تکرارهای زیاد می‌شود. در روش شبه‌نیوتن با افزایش شاخص همگرایی از عدد 100 تا 500، تعداد تکرارهای روش شبه‌نیوتن افزایش پیدا می‌کند، ولی زمان محاسبات همچنان کاهش می‌یابد. این نتایج مبین تفاوت قابل توجه در سرعت هم‌گرایی دو الگوریتم است. در ادامه با افزایش شاخص اطمینان از عدد 500 به دلیل دور شدن حدس اولیه از جواب در روش شبه‌نیوتن، زمان محاسبات نیز افزوده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که تعداد تکرارهای بدست آمده بر اساس شاخص هم‌گرایی معادل 500 کاملا با نظرات لهمن و آکر (Lehmann and Ackerer., 1998) و تریسی (Tracy., 2010) که تعداد تکرارهای پیکارد را برای رسیدن به کم‌ترین زمان به ترتیب، 1 و 20 عدد معرفی می‌کنند، مغایرت دارد. به‌طوری‌که طبق جدول فوق یک تکرار در حلقه پیکارد باعث افزایش شاخص هم‌گرایی از عدد 500 و 20 تکرار منجر به کاهش آن از عدد 0/01 خواهد شد. بنابراین در هر دو حالت زمان کل محاسبات افزایش می‌یابد. پس از تعیین بهترین شاخص هم‌گرایی برای اتمام حلقه پیکارد در الگوریتم پیکارد/ شبه‌نیوتن، خصوصیات سه الگوریتم خطی پیکارد، پیکارد/ شبه‌نیوتن و پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن در قالب زمان اجرای برنامه و تعداد کل تکرارها در جدول 3 مورد بررسی قرار گرفت.

**جدول 3- مقایسه زمان اجرای برنامه توسط سه الگوریتم خطی‌سازی**

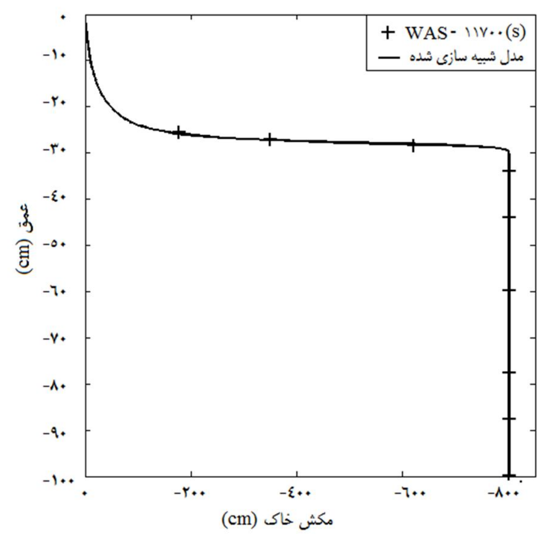
| الگوریتم پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن | | الگوریتم پیکارد/ شبه‌نیوتن | | الگوریتم پیکارد | |
|---|---|---|---|---|---|
| زمان اجرا (ثانیه) | تعداد کل تکرارها | زمان اجرا (ثانیه) | تعداد کل تکرارها | زمان اجرا (ثانیه) | تعداد کل تکرارها |
| 201 | 522 | 213 | 522 | 1048 | 1787 |

نتایج حاصل در جدول 3 تاثیر تلفیق دو روش نیوتن و پیکارد را بر زمان مدل‌سازی و تعداد کل تکرارها نسبت به روش پیکارد نشان می‌دهد. هر تکرار خود به تنهایی باعث افزایش اشغال بخشی از فضای حافظه کامپیوتر و زمان مدل‌سازی است. از این رو در روش پیکارد به‌دلیل بالا بودن تعداد تکرارها که از خطی بودن سرعت هم‌گرایی این روش حاصل می‌شود، زمان محاسبات نیز افزایش می‌یابد. بطوری‌که در زمان 11700 ثانیه از شروع مدل‌سازی، تعداد کل تکرار و زمان محاسبات در روش پیکارد به ترتیب 1787 و 1048 ثانیه

است. درحالی‌که در روش پیکارد/ شبه‌نیوتن زمان و تعداد کل تکرارها به ترتیب به 213 ثانیه و 522 عدد تقلیل پیدا می‌کند. در صورتی‌که تنها از روش شبه‌نیوتن استفاده شود و حدس اولیه در محدوده مناسبی قرار داشته باشد، قطعا از روش پیکارد/ شبه‌نیوتن به‌دلیل حذف تکرارهای پیکارد نیز سریع‌تر خواهد بود. مقایسه روش سوم (پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن) نسبت به دو روش اول و دوم نشان می‌دهد که برخلاف آن‌چه فرض می‌شود، استفاده از روش برویدن باعث کاهش اندکی در زمان محاسبات می‌شود. در این روش با توجه به ثابت بودن شاخص هم‌گرایی پیکارد ($\varepsilon_p$)، تعداد تکرارهای حلقه پیکارد همچنان با روش دوم برابر است. علاوه بر این طبق نتایج جدول 2 مشاهده می‌شود که حداکثر تعداد تکرارها در روش شبه‌نیوتن 2 بار است. از این جهت تاثیر روش تسریع برویدن بر محاسبه معکوس ماتریس ژاکوبین تنها در یک تکرار می‌باشد. بطوری‌که روش تسریع برویدن تنها در یک تکرار فرصت اعمال بر الگوریتم شبه‌نیوتن را دارد، با این‌حال حتی به‌دلیل عدم محاسبه ژاکوبین در یک تکرار نیز، زمان کل محاسبات کاهش می‌یابد. این نتایج خود نشانگر تاثیر محاسبه ژاکوبین بر زمان محاسبات است. ولی تاثیر استفاده از روش برویدن بر زمان و سرعت هم‌گرایی به اندازه تاثیر تلفیق دو روش پیکارد/ شبه‌نیوتن قابل ملاحظه نمی‌باشد و این به‌دلیل فوق خطی (super linear) بودن سرعت هم‌گرایی روش برویدن است (Burden and Faires., 2011).

## بررسی عملکرد مدل در شبیه‌سازی حرکت جریان آب در خاک

همان‌طور که ذکر شده جهت بررسی دقت مدل توسعه داده شده در این مقاله، لازم است به ازای شرایط یکسان، نتایج آن با حل تحلیلی معادله ریچاردز مورد مقایسه قرار بگیرد. در این مقاله حل تحلیلی معادله ریچاردز به روش واریک و همکاران (1985) انتخاب شد. نکته قابل توجه دوبعدی بودن معادله توسعه داده شده و یک-بعدی بودن حل تحلیلی واریک است. بنابراین می‌بایست نتایج یک ستون از فضای محاسباتی مدل شده با نتایج مدل یک‌بعدی واریک، در قالب نیم‌رخ مکش، مقایسه شود. نتایج مدل در ستون‌هایی که در نزدیکی مرزهای سمت چپ و راست هستند تحت تاثیر شرایط مرزی تعریف شده قرار دارند. از این جهت از نیم‌رخ مکش مدل شده در ستون مرکزی فضای محاسباتی استفاده شد و با نیم‌رخ مکش مدل شده توسط حل تحلیلی واریک، مقایسه شد (شکل 2).




**شکل 2- مقایسه نیم‌رخ مکش مدل شده در ستون مرکزی فضای محاسباتی توسط مدل عددی پیشنهادی در این مقاله در مقابل نیم‌رخ مکش محاسبه شده توسط حل تحلیلی معادله ریچاردز به روش واریک و همکاران (Warrick et al., 1985) (WAS)**

در شکل 2 نیم‌رخ مکش مدل شده توسط مدل توسعه داده شده در ستون مرکزی فضای محاسباتی به صورت خط ممتد، در مقابل نیم‌رخ مکش محاسبه شده توسط حل تحلیلی معادله به روش واریک به صورت ضربدرنشان داده شده است. همان طوری‌که در این شکل دیده می‌شود پس از گذشت 11700 ثانیه،رطوبت تا عمق 30 سانتی-متری از سطح خاک نفوذ کرده است و در اعماق بیش‌تر، مکش خاک همچنان معادل مکش اولیه خاک ($h$=-8m) باقی مانده است. در بالا و پایین ستون خاک که بار مکش به ترتیب بر مقادیر 0 متر و 8- متر

ثابت نگاه داشته شده است، نیم‌رخ مکش مدل شده کاملا منطبق بـر این اعداد است و در سایر نقاط ستون خاک، مکش بین این مقادیر به درستی همانند حل تحلیلی توزیع شده است. نیم‌رخ مکش مدل شـده حاصل از حل عددی و حل تحلیلی واریک مطابقت بسـیار خـوبی بـا یکدیگر دارند. بطوری‌که مقدار میانگین ریشه مربعات خطا (RMSE) بین دو مدل معادل0/0001cmمحاسبه شد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش عددی حجـم محـدود ضـمنی بـرای حـل دوبعدی معادله ریچاردز در شرایط حرکت آب در خـاک غیراشـباع بـا رطوبت اولیه متوسط، استفاده شد. با توجه به غیرخطی بـودن معادلـه ریچاردز نیاز به استفاده از الگوریتم‌های خطی‌سازی پیکـارد و نیـوتن است. سرعت هم‌گرایی در روش‌های پیکارد و نیوتن به ترتیب خطی و مرتبه دوم است. سرعت هم‌گرایی بالا در روش نیوتن لزوما به معنـی مناسب‌تر بودن روش نیوتن نیست و این به دلیل حساس بودن روش نیوتن به حدس اولیه و بالا بودن حجم محاسـبه معکـوس مـاتریس ژاکوبین و مشتقات جزیی در هر تکرار است. در حالی‌که روش پیکارد از ایـن حساسـیت برخـوردار نیسـت. از ایـن‌رو بـرای کـاهش حجـم محاسبات ناشی از حل تحلیلـی مشـتقات جزیـی، روش شـبه‌نیـوتن جایگزین روش نیوتن شد و تلفیق دو الگوریتم پیکارد و شبه‌نیوتن به عنوان حلگر معادله غیرخطـی ریچـاردز بـرای ارتقـا حـدس اولیـه در الگوریتم شبه‌نیوتن، انتخاب شد. در ادامه از روش تسریع برویدن برای کاهش محاسبه معکوس ماتریس ژاکوبین در هـر گـام زمـانی، بکـار گرفته شد. برای بررسی عملکرد هر یک از سـه الگـوریتم از دیـدگاه زمان محاسبات، از داده‌های مقاله فون و همکـاران ( Phoon et al., 2007) استفاده شد، که در آن نامبردگان برای یک نمونه خـاک لـوم رسی- شنی،شرایط مرزی و اولیه مشخصی فـرض کردنـد. در اولـین مرحله از مدل‌سازی ابتدا بهترین شاخص هم‌گرایی جهت تغییر حلقـه پیکارد به شبه‌نیوتن انتخاب شد، که به ازای آن زمان محاسـبات بـه حداقل مقدار کاهش یافت. در مرحله دوم، مدل به ازای سه الگـوریتم پیکارد، پیکارد/ شبه‌نیوتن و پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن اجرا شد. نتایج حاصل نشان داد که تلفیق روش‌های پیکارد/ شـبه‌نیـوتن بـه شـدت باعث کاهش زمان محاسبات و تعداد تکرارها نسبت به روش پیکـارد می‌شود. با توجه به این‌که شاخص هم‌گرایی انتخاب شـده منجـر بـه تولید حداکثر دو تکرار در حلقه شبه‌نیوتن در هر گام زمـانی مـی‌شـد، بنابراین روش تسریع برویدن تنها در یک تکرار بر حلقـه شـبه‌نیـوتن اعمال شد و بدلیل فوق خطی بودن سرعت هم‌گرایی آن، تاثیر خفیفی بر کاهش زمان محاسبات نشان داد. در ادامه با اسـتفاده از الگـوریتم پیکارد/ شبه‌نیوتن/ برویدن معادله دوبعدی ریچاردز بـه روش عـددی حجم محدود حل شد و نتایج به صورت نیم‌رخ مکش با حل تحلیلـی به روش واریک مقایسه شد. مطابقت بالای نتایج با حل تحلیلی مبین آن است که روش ضمنی حجم محدود بـرای حـل دوبعـدی معادلـه ریچاردز، انتخاب مناسبی است.

## منابع


Bevilacqua,I., Canone.D and Ferraris.S. 2011. Acceleration techniques for the iterative resolution of the Richards equation by the finite volume method. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 27.8: 1309-1320.

Broadbridge,P and Rogers,C. 1990. Exact solutions for vertical drainage and redistribution in soils. Journal of Engineering Mathematics. 24.1: 25-43.

Broyden,C.G. 1965. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. Mathematics of Computational Geosciences.19: 577-593.

Burden,R.L and Faires,J.D. 2011. Numerical Analysis, Richard Stratton.

Caviedes-Voullieme,D., Garcia-Navarro.P and Murillo.J. 2013. Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. Journal of Hydrology.480: 69-84.

Durick,A.M. 2004. Analysis and improvement of the nonlinear iterative techniques for groundwater flow modelling utilising MODFLOW. Master thesis.Queensland University of Technology.

Huang,K., Mohanty,B.P., Leij,F.G and Van Genuchten,M.T. 1998. Solution of the nonlinear transport equation using modified Picard iteration. Advances in Water Resources. 21.3: 237-249.

Fassino,C., Manzini,G. 1998. Fast-secant algorithms for the non-linear Richards equation. Communications in Numerical Methods in Engineering. 14.10: 921-930.

Lehmann,F., Ackerer,P. 1998. Comparison of Iterative Methods for Improved Solutions of the Fluid Flow Equation in Partially Saturated Porous Media. Transport in Porous Media. 31.3: 275-292.

Manzini,G and Ferraris,S. 2004. Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards' equation. Advances in Water Resources. 27.12: 1199-1215.

Mehl,S. 2006. Use of Picard andNewton Iteration for Solving Nonlinear Ground Water Flow Equations. Ground Water. 44.4: 583-594.

saturated porous media: under-relaxation and mass balance. Geotechnical and Geological Engineering. 25.5: 525-541.

Sadegh Zadeh,K. 2011. A mass-conservative switching algorithm for modeling fluid flow in variably saturated porous media. Journal of Computational Physics. 230.3: 664-679.

Tracy.F. 2010. Testing computational algorithms for unsaturated flow. The Open Hydrology Journal. 4:227-235.

Tocci,M.D., Kelley,C.T., Miller,C.T and Kees,C.E. 1998. Inexact Newton methods and the method of lines for solving Richards' equation in two space dimensions. Computational Geosciences. 2.4: 291-309.

Van Genuchten,M.T. 1980. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. Soil Science Society of America Journal. 44.5: 892-898.

Walker,H., Woodward,C., Yang,U. 2010. An accelaration fixed-point iteration for solution of variably saturated flow. In: J. Carrera (Ed) Proceedings of XVIII International Conference on Water Resources, Barcelona. (available online at http://congress.cimne.com/CMWR2010/Proceedings/Start.html).

Warrick,A.W., Lomen,D.O and Yates,S.R. 1985. A Generalized Solution to Infiltration1. Soil Science Society of America Journal. 49: 34-38.

Misiats,O and Lipnikov,K. 2013. Second-order accurate monotone finite volume scheme for Richards' equation. Journal of Computational Physics. 239: 123-137.

Mualem, Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resources Research. 12.3: 513-522.

Panday,S and Huyakorn,P.S. 2004. A fully coupled physically-based spatially-distributed model for evaluating surface/subsurface flow. Advances in Water Resources. 27.4: 361-382.

Panday,S., Huyakorn,P.S., Therrien,R and Nichols,R.L. 1993. Improved three-dimensional finite-element techniques for field simulation of variably saturated flow and transport. Journal of Contaminant Hydrology.12.1: 3-33.

Paniconi,C., Aldama,A.A and Wood,E.F. 1991. Numerical evaluation of iterative and noniterative methods for the solution of the nonlinear Richards equation. Water Resources Research. 27.6: 1147-1163.

Paniconi,C and Putti.M. 1994. A comparison of Picard and Newton iteration in the numerical solution of multidimensional variably saturated flow problems. Water Resources Research. 30.12: 3357-3374.

Philip,J.R. 1967. Theory of infiltration. Advances in Hydroscience.1967.5:215-305.

Phoon,K.K., Tan,T.S and Chong,P.S. 2007. Numerical simulation of Richards equation in partially

**Iranian Journal of Irrigation and Drainage**
**No. 4, Vol. 11, Oct.-Nov. 2017, p. 517-527**

**نشریه آبیاری و زهکشی ایران**
**شماره4، جلد 11، مهر - آبان 1396، ص. 527-517**

# Application of Acceleration Technique to Improve the Convergence of Nonlinear Solvers for the Solution of Richards Equation Using the Finite Volume method

**G.Farahi[1], S. R. Khodashenas[2]*, A. Alizadeh[3], A.N. Ziaee[4]**

Recived: Oct.18, 2016 Accepted: Jan.21, 2017

## Abstract

Groundwater flow in variably saturated soils is described by the nonlinear Richards equation. The solution of Richards equation using implicit finite volume method produces a system of nonlinear equations, whose resolution demands for the application of an appropriate nonlinear systems solvers, such as the Picard or the Newton schemes. The Picard iterative technique is a robust method, which is convergent at a linear rate while the Newton-Raphson (Newton) method can produce accurate results when using a suitable initial guess and converge at a much higher rate. But since the computational cost of Newton method, due to the calculation of the formal inversion of Jacobian Matrix and partial derivatives is high, this method doesn't seem to be demanding for the problems with more than one dimension. In this paper, to reduce the cost and time of Newton's iterations, the mixed form of Picard and quasi-Newton followed by the Broyden method is employed. Therefore the purpose of this paper is first to investigate the effect of three linearization methods on the time of calculation and then to study the accuracy of the proposed implicit finite volume method for solving two dimensional mixed form of Richards equation. For this, data from a test case for a sandy clay loam soil with constant head as a boundary condition and initial moisture close to residual moisture was used. Comparison of the three linearized methods showed that for well selected convergence criterion, Picard/quasi Newton algorithm can dramatically reduce the time of calculations and number of iteration when compared to Picard scheme. Broyden method has a small effect on reducing time of calculation comparing with Picard/quasi Newton method. The performance of the proposed numerical method was then studied for two dimensionalmovement of water in a variably saturated soil using Picard/quasi Newton/Broyden method in comparison with the Warrick's analytical solution. The results showed that the implicit finite volume method produced a good fit to the analytical solution, so that the RMSE=0.0001 was calculated between the models results and analytical solution on Richards equation.

**Keywords:** Richards equation, finite volume method, nonlinear solvers

1 - PhD student, Water Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad
2 - Professor, Water Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad
3 - Professor, Water Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad
4- Associate Professor, Water Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad
(*-Corresponding Author: khodashenas@ferdowsi.um.ac.ir)