نشریه آبیاری و زهکشی ایران
شماره۳، جلد ۱۴، مرداد - شهریور ۱۳۹۹، ص. ۷۶۴-۷۵۰

Iranian Journal of Irrigation and Drainage
No. 3, Vol. 14, Agu.-Sept. 2020, p. 750-764

توسعه الگوهای ضمنی و صریح در شبیه‌سازی معادلات هیپربولیک سنت‌ونانت

محمدرضا حیدری‌توانی[1*]، مهدی فولادی‌پناه[2]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۲/۳

چکیده

مدل‌های عددی جدید توسعه‌یافته برای حل معادلات هیپربولیک سنت ونانت، ضمن داشتن ارزش علمی و تحقیقاتی نقش بسیار مهمی در طراحی سازه‌ای و نیز مدیریت عملکرد سازه‌های هیدرولیکی دارند. در این پژوهش، ضمن توسعه دو الگوی گسسته‌سازی صریح معکوس و نیمه ضمنی بر اساس الگوی پرایزمن چهار نقطه‌ای، کاربرد آن‌ها برای روندیابی سیل در بازه‌ای از رودخانه دوآب صمصامی در زیرحوضه‌های کارون مورد مطالعه و ارزیابی قرار گرفته است. مدل صریح معکوس بر مبنای الگوی Priseman و الگوی نیمه ضمنی با به‌کارگیری الگوی پرایزمن برای مشتقات مکانی هم‌زمان با کاربرد الگوی Upwind توسعه‌یافته‌اند. شبیه‌سازی هیدروگراف خروجی جریان با ارزیابی عملکرد مدل‌ها با شاخص‌های ناش-ساتکلیف (NS)، ضریب تبیین (R^2)، مجذور میانگین مربعات خطا و مقدار استانداردشده‌ی آن (RMSE) و (NRMSE) و شاخص اختلاف توسعه یافته نسبی (Q_{DDR}) با تعیین ضریب زبری مانینگ به‌عنوان پارامتر اصلاحی، در هر دو مدل در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی انجام شد. مقدار شاخص‌های مذکور برای مدل صریح معکوس و نیمه ضمنی در دوره صحت‌سنجی به ترتیب (۹۳۵۲/، ۰/۹۸۸۶، ۲/۶۰۴، ۲۴/۶، ۳/۱۴۶) و (۰/۹۸۴۳، ۰/۹۹۴۳، ۱/۲۸۳، ۱۲/۱، ۳/۹۰۹) به دست آمدند که نشان از کارکرد قابل اعتماد دو مدل همراه با برتری نسبی مدل نیمه ضمنی بود. برای اطمینان از عملکرد مدل‌ها، هیدروگراف دیگری نیز مورد شبیه‌سازی قرار گرفت به طوری‌که مقدار ضرایب NS، NRMSE و Q_{DDR} برای مدل نیمه ضمنی و صریح معکوس به ترتیب (۰/۹۷، ۸/۱۷۲، ۳/۷۱۳) و (۰/۹۳۳۹، ۱۲/۲۸، ۲/۶۱۲) محاسبه شدند. این مقادیر نیز قابلیت اعتماد و کارکرد دو مدل را تایید کردند. دقت مدل نیمه‌ضمنی در همه موارد بیشتر از مدل صریح معکوس بود. پایداری حل علاوه بر راندمان بالای محاسبات از جمله مزایای مدل نیمه ضمنی و تولید معادلات کوپلی پیچیده غیرخطی از محدودیت‌های آن می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: روندیابی سیلاب، گسسته‌سازی، معادلات سنت‌ونانت، مدل عددی، الگوی پرایزمن

مقدمه

تغییرات مکانی و زمانی جریان‌های متغیر ناپایدار برای اولین بار به‌صورت یک‌بعدی توسط سنت‌ونانت در سال ۱۸۷۱ در قالب دو معادله‌ی دیفرانسیل جزئی هیپربولیک پیوستگی و مومنتوم ارائه شد. روش تحلیلی و روش عددی دو راه‌حل برای معادلات سنت‌ونانت هستند که استفاده از روش‌های عددی، همزمان با توسعه الگوهای گسسته‌سازی کاربرد بسیار زیادی بین محققان پیدا کرده است. روندیابی هیدرولوژیکی و روندیابی هیدرولیکی به کمک شماهای گسسته‌سازی صریح و ضمنی در زمره روش‌های حل عددی معادلات سنت‌ونانت هستند. روندیابی هیدرولوژیکی برخلاف روندیابی هیدرولیکی، که بر حل کامل معادلات سنت‌ونانت استوار است، بر پایه‌ی حل معادله‌ی پیوستگی همراه با معادله‌ی دبی-ذخیره است که به همین دلیل نسبت به روندیابی هیدرولیکی از دقت نسبی کمتری برخوردار است. با این حال، سهولت روش روندیابی هیدرولوژیکی باعث توسعه و افزایش کاربرد آن شده است. وایلی فن کنترل گذرا بر مبنای حل‌گر هیدرولیکی خصوصیات برای حل معادلات سنت‌ونانت را به کار گرفت (Wylie, 1969). فینیما و چاودری فن عددی صریح مک‌کورمک و گابوتی را بر مبنای روش اختلاف محدود در حل معادلات سنت‌ونانت ارائه دادند. آن‌ها همچنین شرایط پایداری حل، اعمال شرایط مرزی و تأثیرشان در همگرایی حل عددی را در راه‌حل خود بیان نمودند (Fennema and Chaudhry, 1990). یوست و روا الگوریتم شبکه‌ای چندگانه را به‌منظور حل معادلات یک‌بعدی سنت‌ونانت به کار گرفتند. آن‌ها الگوریتم پیشنهادی خود را با الگوی مک‌کورمک مرتبه‌ی دوم به‌صورت کوپلی ادغام کردند. روش پیشنهادی آن‌ها به‌خصوص در جریان‌های انتقالی مانند پرش هیدرولیکی نتایج رضایت‌بخشی داشت (Yost and Rao, 2000). کرایسویچ و همکاران با استفاده از الگوی ضمنی معادلات یک‌بعدی

۱- استادیار گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران
۲- استادیار گروه عمران، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران
(*- نویسنده مسئول: (Email: m.reza.h56@gmail.com

سنت‌ونانت را حل نمودند. آن‌ها بـا اسـتفاده از روش الگـوی ضـمنی آپویند موفق به افزایش دقت حل عـددی و نیـز بـالا بـردن رانـدمان مدل‌سازی سیستم معادلات هیپربولیک سنت‌ونانت شدند. روش آن‌ها مبتنی بر المان محدود خطی‌سـازی شـده بـود (Kranjcevic et al., 2006). آرتیسویچ و سـیمیکوویچ معادلـه‌ی جریـان متغیـر تـدریجی غیردائمی را همراه با معادله‌ی انرژی با استفاده از تئوری لیپشیتز حـل نمودنـد (Artichowicz and Szymkiewicz, 2014). اکبـری و فیروزی (۱۳۸۹) دو الگوی صریح و ضمنی را به‌منظور حـل معـادلات یک‌بعدی سنت‌ونانت در مجاری طبیعـی ارائـه دادنـد. آن‌هـا الگـوی پخشی لاکس و الگوی اختلاف محدود پرایـزمن را در تحقیـق خـود استفاده کردند. اکبری و همکاران (۱۳۹۰) بررسـی شـماهای مختلـف روندیابی هیدرولوژیکی را در رودخانه کارون ارزیابی و نتایج حاصل از آن را با روندیابی هیدرولیکی مقایسه نمودند. نتایج تحقیقات نشان داد که شماهای مورد مطالعه عموماً خروجی قابـل قبـولی در مقایسـه بـا هیدروگراف مشاهداتی از خود نشان می‌دهند. همچنین اخـتلاف بـین نتایج این شماها قابل ملاحظـه نیسـت. نتـایج محاسـبه‌شـده توسـط روش‌های مورد مطالعه به‌طور قابل قبولی مشابه روش موج دینامیکی بود. براتی و اکبری (۱۳۹۱) به ارزیـابی مـدل‌هـای هیـدرولوژیکی در روندیابی سیلاب در رودخانه کارون پرداختند. نتایج پژوهش نشان داد در صورت فقدان داده‌های مورد نیـاز بـرای بـه‌کـارگیری مـدل مـوج دینامیکی، استفاده از روش‌های هیـدرولوژیکی ماسـکینگهام خطـی و غیرخطی نتایج رضایت‌بخشی به دنبال دارد. مطالعه‌ی دیگری توسـط ولی‌سامانی و همکاران (۱۳۹۲) در به‌کارگیری روش الگوریتم ژنتیـک و مقایسه آن با روندیابی هیدرولوژیکی ماسکینگهام انجام گرفته است. آن‌ها مطالعه‌ی خود را روی رودخانه‌های شریانی انجام دادند. استفاده از دو روش به کار گرفته شده نتایج رضایت‌بخشی داشت. حسن‌پـور و شیخعلی‌پور (۱۳۹۳) در تحقیـق خـود بـه بررسـی دقـت مـدل‌هـای هیدرولوژیکی از طریق مقایسه با مدل‌های شبکه عصبی در رونـدیابی سیلاب پرداختند. نتایج پژوهش آن‌هـا نشـان داد مـدل‌هـای عصـبی نسبت به مدل‌های هیدرولوژیکی از دقت بیشتری برخوردار هسـتند و هیدروگراف سیلاب را با خطای کمتری روندیابی می‌کنند. جاویـدان و بهره‌مند (۱۳۹۵) بررسـی حساسـیت پارامترهـای مـؤثر بـر رونـدیابی هیدروگراف سیل با روش موج پخشی دیفیوژن با مدل هیـدرولوژیکی توزیعی WetSpa در حوضه‌ی آبخیز زیارت گرگـان را مـورد مطالعـه قرار دادند. مطالعه‌ی آن‌ها نشان داد کـه تأثیر تغییـر فراوانـی سـیل و ضریب زبری نسبت به آستانه‌ی شیب حـداقل و آسـتانه‌ی سـطح بـر روی هیدروگراف خروجی و هیدروگراف واحد حوزه بیشتر است.

مرور منابع انجـام گرفتـه مؤیـد ایـن مطلـب اسـت کـه ارائـه‌ی مدل‌های جدید عددی در حل معادلات سنت‌ونانت همچنان از جایگاه ارزشمندی بین محققان برخوردار اسـت. در ایـن مقالـه نیـز دو مـدل عددی بر مبنای الگوی گسسته‌سازی صریح معکوس و نیمـه ضـمنی بـه‌منظـور حـل معـادلات سـنت‌ونانـت در بـازه‌ای از رودخانـه دوآب صمصامی در استان چهارمحال و بختیاری ارائه شده است.

مواد و روش‌ها

شکل پایستار معادلات یک‌بعدی هیپربولیک پیوستگی و مومنتوم سنت‌ونانت به‌قرار زیر است:

$$X_t+Y_x+Z=0 \qquad (۱)$$

کـــــه در ایـــــن معادلـــــه $X=\begin{bmatrix}A\\Q\end{bmatrix}$، $Y=\begin{bmatrix}Q\\QU+gAy'\end{bmatrix}$ و $Z=\begin{bmatrix}Q\\-gA(S_o-S_f)\end{bmatrix}$ می‌باشند. لازم به ذکر است در این عبارت‌هـا Q بیانگر دبی، U بیانگر سرعت، g شتاب ثقل، A مساحت مقطع عرضی جریان، S_o شیب طولی مجرا و S_f شیب افت اصطکاکی هستند.

مدل عددی صریح معکوس

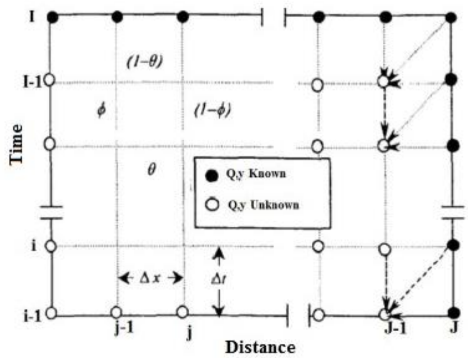
به‌منظور توسعه و کاربرد مدل صریح معکـوس از روش پرایـزمن چهار نقطه‌ای استفاده شده است. طبق الگوی پرایزمن می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\phi\frac{f_{j-1,i+1}-f_{j-1,i-1}}{\Delta t}+(1-\phi)\frac{f_{j,i}-f_{j,i-1}}{\Delta t} \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\theta\frac{f_{j,i-1}-f_{j-1,i-1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{f_{j,i}-f_{j-1,i}}{\Delta x} \qquad (۳)$$

$$F(x,t)=\theta\left[\phi f_{j-1,i-1}+\left(1-\phi\right)f_{j,i-1}\right]+\left(1-\theta\right)[\phi f_{j-1,i}+\left(1-\phi\right)f_{j,i}] \qquad (۴)$$

کـه $f_{j,i}=f(j\Delta x,i\Delta t)$، Φ و θ ضـرایب وزنـی هسـتند. شـکل ۱ الگوی عددی صریح معکوس را به‌صورت شماتیک ارائه می‌دهد.



شکل ۱- نمای شماتیک از الگوی صریح معکوس

بر اساس الگوی پرایزمن، دو شرط مرزی در مرز پایین‌دست برای استفاده از گسسته‌سازی عددی صریح معکوس لازم است کـه شـامل مقدار دبی و اشل در هر گام زمانی است. حل معادلات طبق شـکل ۱ از گره سمت راست بالا در صفحه‌ی x-t شروع می‌شود. بـه‌کـارگیری معادلات اختلاف محدود در هر گام زمانی منجر به دو معادلـه جبـری با دو مجهول خواهد شد. ایـن دو معادلـه بـرای هـر دو گـره مجـاور یکدیگر به‌قرار زیر هستند:

$$L_1 Q_{j-1} + M_1 Q_j + R_1 y_{j-1} + S_1 y_j + T_1 = 0 \quad (5)$$

$$L_2 Q_{j-1} + M_2 Q_j + R_2 y_{j-1} + S_2 y_j + T_2 = 0 \quad (6)$$

که در این معادلات Q_{j-1} و y_{j-1} به ترتیب مقدار دبی و عمق آب در گام زمانی j-1 تا i در گره j-1، Q_j و y_j مقدار دبـی و عمـق آب در گــره jام و L_1، M_1، R_1، S_1، T_1، L_2، M_2، R_2، S_2 و T_2 ضــرایب محاسبه شده بـا مقـادیر معلـوم پارامترهـای Q و y در گـام زمـانی i هستند. لازم به ذکر است مقدار عمق جریان در هر گره که منطبق بر مقطع عرضی برداشت شده از مسیر جریان مـی‌باشـد از تفاضـل تـراز سطح آب، η، و تراز بستر، h، حاصل خواهد شد. فـرم گسسـته شـده معادله‌ی (۱) براساس الگوی صریح معکوس با روش پرایزمن به قـرار زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta}{\Delta x}\left(Q_j^{i-1}-Q_{j-1}^{i-1}\right)+\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(Q_j^i-Q_{j-1}^i\right)+\frac{\phi}{\Delta t}\left(A_{j-1}^i-A_{j-1}^{i-1}\right)+\frac{1-\phi}{\Delta t}\left(A_j^i-A_j^{i-1}\right)=0 \quad (7)$$

$$\frac{\phi}{\Delta t}\left(Q_{j-1}^i-Q_{j-1}^{i-1}\right)+\frac{1-\phi}{\Delta t}\left(Q_j^i-Q_j^{i-1}\right)+\frac{2Q}{A}\left[\frac{\theta}{\Delta x}\left(Q_j^{i-1}-Q_{j-1}^{i-1}\right)+\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(Q_j^i-Q_{j-1}^i\right)\right] \quad (8)$$

$$-\frac{Q^2}{A^2}\left[\frac{\theta}{\Delta x}\left(y_j^{i-1}-y_{j-1}^{i-1}\right)+\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(y_j^i-y_{j-1}^i\right)\right]+gy\left[\left\{\frac{\theta}{\Delta x}\left(y_j^{i-1}-y_{j-1}^{i-1}\right)+\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(y_j^i-y_{j-1}^i\right)\right\}-S_o+S_f\right]=0 \quad (9)$$

که در این معادلات ضـرایب ثابـت بـه قـرار $L_1=-\frac{\theta}{\Delta x}$، $M_1=\frac{\theta}{\Delta x}$، $R_1=-\frac{\phi}{\Delta t}$، $S_1=-\frac{1-\phi}{\Delta t}$، $T_1=\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(Q_j^i-Q_{j-1}^i\right)+\frac{\phi}{\Delta t}y_{j-1}^i+\frac{1-\phi}{\Delta t}y_j^i$، $L_2=-\frac{\phi}{\Delta t}-\frac{\theta}{\Delta x}\frac{2Q}{A}$، $M_2=-\frac{1-\phi}{\Delta t}+\frac{\theta}{\Delta x}\frac{2Q}{A}$، $S_2=\frac{\theta}{\Delta x}gy-\frac{\theta}{\Delta x}\frac{Q^2}{A^2}$ و

$$T_2=\frac{1-\phi}{\Delta t}Q_j^i+\frac{\phi}{\Delta t}\left[\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(Q_j^i-Q_{j-1}^i\right)\right]-\frac{Q^2}{A^2}\left[\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(y_j^i-y_{j-1}^i\right)\right]+gy\left[\left\{\frac{1-\theta}{\Delta x}\left(y_j^i-y_{j-1}^i\right)\right\}+S_f-S_o\right]$$

هستند. اگر تعداد کل گره‌هـای محاسـباتی j باشـد تعـداد متغیرهـای محاسباتی 2j خواهد بود. با مشخص بودن مقـدار Q_j و y_j در دو گـام زمانی در مرز پایین‌دست، مقدار دبی و عمق آب در گره j-1 از روابـط زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$Q_{j-1}=\frac{R_1\left(M_2Q_j+S_2y_j+T_2\right)-R_2(M_1Q_j+S_1y_j+T_1)}{L_1R_2-R_1L_2} \quad (10)$$

$$y_{j-1}=\frac{R_1\left(M_2Q_j+S_2y_j+T_2\right)-L_2(M_1Q_j+S_1y_j+T_1)}{L_2R_1-R_2L_1} \quad (11)$$

به‌منظور حفظ شرایط پایداری حل، از معیار کورانـت، فردریـک و لووی که به قرار زیر است استفاده می‌شود:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{U_o+c}=\frac{\Delta x}{U_o+\sqrt{gy_o}} \quad (12)$$

مدل عددی نیمه ضمنی

در این بخش مدل نیمه ضمنی برای حـل معـادلات هیپربولیـک سنت‌ونانت ارائه شده است. بـدین منظـور از الگـوی چهـار نقطـه‌ای پرایزمن برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی استفاده شده است. طبـق این روش می‌توان نوشت:

$$f=\frac{1}{2}\theta\left(f_{i+1}^{n+1}+f_i^{n+1}\right)+\frac{1}{2}(1-\theta)(f_{i+1}^n+f_i^n) \quad (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\theta(f_{i+1}^{n+1}-f_i^{n+1})}{\Delta x}+\frac{(1-\theta)(f_{i+1}^n-f_i^n)}{\Delta x} \quad (14)$$

که در این معادله Δx گام زمانی، θ پارامتر وزنی، f پارامتر وابسته، n و i به ترتیب مشخص کننده موقعیت مکانی و زمـانی پـارامتر f در میدان جریان هستند. به منظور حفظ شرایط پایداری حل، مقدار θ در بازه [۰/۵ ،۱] در نظر گرفته می‌شود. بنـابراین معـادلات (۱) و (۲) در بازه‌ی [0,L] در شبکه جابه‌جاشده گسسته خواهند شد که گره‌های آن با نمادهای x_i و $x_{i+\frac{1}{2}}$ نمایش داده می‌شوند. در این حالت مقـدار دبـی یا سرعت در گره‌هایی با اندیس نیمه صـحیح، $Q_{i+\frac{1}{2}}$ و $U_{i+\frac{1}{2}}$، تعریـف خواهنـد شـد در حـالی کـه مقـدار عمـق جریـان، y_i، کـه در بـازه‌ی $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ ثابت فرض می‌شود، دارای اندیس‌های صحیح خواهد بود. گـام مکـانی شـبکه بـه‌صـورت $\Delta x_i=x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}$ و $\Delta x_{i+\frac{1}{2}}=\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ تعریف می‌شوند. با انتگـرال‌گیـری از معادلـه‌ی پیوسـتگی جریـان در بازه‌ی $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ می‌توان نوشت:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}}(A_t+Q_x)\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}}A\,dx+\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}}Q\,dx=0 \quad (15)$$

معادله‌ی (۱۵) به فرم زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\frac{\partial}{\partial t}V_i(\eta_i)+[(Q(i+\tfrac{1}{2})-Q(i-\tfrac{1}{2})]=0 \quad (16)$$

کـه در ایـن معادلـه $V_i(\eta_i)$ حجـم آب در حدفاصـل دو گـره $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ است. فرم نیمه ضمنی حجم آب در گره iام در لحظـه‌ی n+1 به قرار زیر قابل نوشتن است:

$$V_i\left(\eta_i^{n+1}\right)=V_i(\eta_i^n)-\Delta t[Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+\theta}-Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\theta}] \quad (17)$$

که در این معادله $V_i(\eta_i)$ تابعی غیرخطـی از **η** اسـت. همچنـین طبق تعریف می‌توان نوشت:

$$Q^{n+\theta}=\theta Q^{n+1}+(1-\theta)Q^n \quad (18)$$

معادله‌ی (۱۸) توصیف کننده فرم گسسته شده اصل بقای حجـم سیال است. چون مقادیر تراز سـطح آب، η، و نیـز تـراز بسـتر، h، در گره‌هایی با اندیس صحیح تعریف می‌شوند، ولی مقـدار دبـی در گـره نیمه صحیح باید تعریف شود، $Q_{i+\frac{1}{2}}$، لازم است تراز سـطح آب و تـراز کف به صورت صریح در گره $i+\frac{1}{2}$ محاسبه شوند. بدین منظور الگوی Upwind زیر بر اساس علامت $Q_{i+\frac{1}{2}}$ بـه‌منظـور تعریـف **η** اسـتفاده می‌شود:

$$\eta_{i+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\eta_i & \text{if} \qquad Q_{i+\frac{1}{2}}\geq 0\\ \eta_{i+1} & \text{if} \qquad Q_{i+\frac{1}{2}}<0\end{cases} \qquad (۱۹)$$

مقدار تراز کف نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه خواهد شد:

$$-h_{i+\frac{1}{2}}=\min(-h_i,-h_{i+1}) \qquad (۲۰)$$

گسسته‌سازی معادله‌ی مومنتوم باید به گونه‌ای انجام پذیرد که علاوه بر برقراری ضوابط و شرایط گسسته‌سازی عددی، مدل‌سازی میدان جریان باید به‌طوری باشد که با توجه به اشتراک عبارت جابجایی در اصل بقای انرژی و مومنتوم، هر دو اصل برقرار شوند. اما با توجه به اینکه انرژی کمیت اسکالر و مومنتوم کمیت برداری است و همچنین اصل بقای انرژی مبتنی بر نیروهای داخلی و اصل بقای مومنتوم مبتنی بر نیروهای خارجی است این دو اصل تفاوت ماهیتی با یکدیگر دارند. چاو (۱۹۵۹) بیان می‌دارد در جریان‌های متغیر تدریجی افت انرژی درونی سیال معادل با افت انرژی ناشی از عوامل خارجی است به عبارتی دیگر هر دو اصل بقای انرژی و مومنتوم در جریان‌های متغیر تدریجی ضامن برقرار یکدیگر هستند. تورو (۱۹۹۷) بیان می‌کند زمانی که ناپیوستگی جریان نه به دلیل تشکیل شوک بلکه به دلیل هندسه مجرا ایجاد شود برقراری اصل بقای مومنتوم تضمین‌کننده برقراری اصل بقای انرژی نیز خواهد بود. بنابراین با توجه به مطالب فوق‌الذکر، در این تحقیق از گسسته‌سازی معادله مومنتوم برای حل معادلات استفاده شده است.

گسسته‌سازی بر اساس برقراری اصل بقای مومنتوم

این نوع گسسته‌سازی، مبتنی بر کاربرد الگوی اختلاف محدود مرکزی برای انتگرال‌گیری مکانی تراز سطح آزاد آب و الگوی نیمه ضمنی برای گسسته‌سازی زمانی است. در نتیجه برای گسسته‌سازی گرادیان سطح آزاد آب از روش پرایزمن و برای عبارت جابجایی از الگوی صریح استفاده خواهد شد. معادله‌ی نهایی پس از گسسته‌سازی به قرار زیر خواهد بود:

$$\left(1+\frac{\gamma^n_{i+\frac{1}{2}}}{A^n_{i+\frac{1}{2}}}\right)Q^{n+1}_{i+\frac{1}{2}}+gA^n_{i+\frac{1}{2}}\theta\frac{\Delta t}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\left(\eta^{n+\theta}_{i+1}-\eta^{n+\theta}_{i}\right)=F^n_{i+\frac{1}{2}} \qquad (۲۱)$$

که در معادله‌ی (۲۱)

$$F^n_{i+\frac{1}{2}}=Q^n_{i+\frac{1}{2}}-\Delta t\frac{(UQ)^n_{i+1}-(UQ)^n_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}-gA^n_{i+\frac{1}{2}}\theta\Delta t\left(\frac{\eta^n_{i+1}-\eta^n_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\right) \qquad (۲۲)$$

است. در معادله‌ی (۲۲)، مقدار $A^n_{i+\frac{1}{2}}$ از رابطه $A^n_{i+\frac{1}{2}}=A(x_{i+\frac{1}{2}},\frac{\eta^n_{i+1}-\eta^n_i}{2})$ محاسبه می‌شود. مقدار عبارت جابجایی، UQ، که برای محاسبه‌ی F در گره‌های محاسباتی با اندیس صحیح i باید مشخص باشند با کمک روش Upwind از معادله زیر تعیین خواهد شد:

$$(UQ)^n_i=\frac{Q^n_{i+\frac{1}{2}}+Q^n_{i-\frac{1}{2}}}{2}\begin{cases}U^n_{i-\frac{1}{2}} & \text{if} \qquad \frac{Q^n_{i+\frac{1}{2}}+Q^n_{i-\frac{1}{2}}}{2}\geq 0\\ U^n_{i+\frac{1}{2}} & \text{if} \qquad \frac{Q^n_{i+\frac{1}{2}}+Q^n_{i-\frac{1}{2}}}{2}<0\end{cases} \qquad (۲۳)$$

الگوریتم حل معادلات

در هر گام زمانی مجهولات $F^n_{i+\frac{1}{2}}$ و η_i^{n+1} در معادلات (۸) و (۱۱) مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی را در شبکه محاسباتی تشکیل خواهند داد. به منظور تسهیل در حل و همچنین کاهش حجم محاسبات می‌توان با جاگذاری عبارت $Q^{n+1}_{i+\frac{1}{2}}$ از معادله‌ی (۱۰) در معادله‌ی (۷) سیستم معادلات را به سیستم یک مجهولی برحسب تراز آب، η_i^{n+1}، به فرم زیر بیان کرد:

$$V_i\left(\eta_i^{n+1}\right)+p^n_{i-\frac{1}{2}}\left(\eta^{n+1}_{i-1}\right)+d^n_i\left(\eta^{n+1}_i\right)+p^n_{i+\frac{1}{2}}(\eta^{n+1}_{i+1})=f^n_i \qquad (۲۴)$$

که در این معادلات $p^n_{i\pm\frac{1}{2}}$، d^n_i و f^n_i به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p^n_{i\pm\frac{1}{2}}=-\frac{g(\theta\Delta t)^2A^n_{i\pm\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\left(1+\gamma^n_{i+\frac{1}{2}}\Delta t\right)}\quad d^n_i=-p^n_{i+\frac{1}{2}}-p^n_{i-\frac{1}{2}} \qquad (۲۵)$$

$$F^n_i=V_i(\eta^n_i)-(1-\theta)\Delta t\left[Q^n_{i+\frac{1}{2}}-Q^n_{i+\frac{1}{2}}\right]-\theta\Delta t\left[\frac{F^n_{i+\frac{1}{2}}}{\left(1+\gamma^n_{i+\frac{1}{2}}\Delta t\right)}-\frac{F^n_{i-\frac{1}{2}}}{\left(1+\gamma^n_{i-\frac{1}{2}}\Delta t\right)}\right] \qquad (۲۶)$$

سیستم معادلات ارائه شده در هر گام زمانی n در معادله‌ی (۲۶) را می‌توان در قالب ماتریسی زیر خلاصه‌نویسی نمود:

$$V(\eta)+M\eta=f \qquad (۲۷)$$

که در این معادله $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)^T$ بردار مجهولات است. تعاریف عبارات معادله‌ی (۲۷) به قرار زیر است:

$$V(\eta)=\begin{bmatrix}V_1(\eta_1)\\ V_2(\eta_2)\\ \cdots\\ V_N(\eta_N)\end{bmatrix}\ M=\begin{bmatrix}d_1 & p_{\frac{3}{2}} & \cdots & 0\\ p_{\frac{3}{2}} & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & p_{N-\frac{1}{2}}\\ \vdots & \ddots & p_{N-\frac{1}{2}} & \\ 0 & \cdots & & d_N\end{bmatrix}\ f=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_N\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

سیستم معادلات (۲۷)، سیستم غیرخطی است. ماتریس ضرایب M متقارن و سه قطری است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن مثبت

و بقیه منفی هستند. مقدار مجهولات را می‌توان با استفاده از روش‌های مختلف مانند روش تکرار و خطا حل نمود. بعد از اینکه مقدار η^{n+1} به دست آمد مقدار عبارت Q^{n+1} به راحتی برحسب مقدار η^{n+1} با استفاده از معادله ۱۰ قابل محاسبه خواهد بود. در کل، الگوهای عددی مرتبه اول دارای خطای میرایی و الگوهای مرتبه دوم نیز دارای خطای پراکندگی عددی غیرواقعی می‌باشند که باعث ایجاد نوساناتی بخصوص در نواحی ناپیوسته جریان خواهند شد. به منظور بهبود دقت مدل عددی برای حل پایدار بدون بررسی شرط پایداری حل اما برقراری شرط TVD از روش محدود کننده شار استفاده گردید. الگوی انتخابی در این مدل، دارای دقت مرتبه اول است. با استفاده از روش شار محدود کننده، الگوی عددی دارای دقت مرتبه اول به الگوی عددی دارای دقت مرتبه دوم ارتقا می‌یابد. به همین دلیل روش محدود کننده شار در تقریب‌سازی عبارت جابجایی، به کار گرفته شد. بر مبنای معادله گسسته شده، روش محدود کننده شار به عبارت جابجایی، UQ، مقدار تصحیح کننده‌ای را با استفاده از تابع محدود کننده شار، Ψ، اضافه می‌کند که مقدار آن تابعی از نظم و ترتیب مقادیر عددی به دست آمده برای عبارت جابجایی است. بنابراین، تقریب عبارت جابجایی به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$(UQ)_x \approx \frac{\left[(UQ)_{i+1}+\frac{1}{2}\Psi\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta(UQ)_{i+\frac{3}{2}}\right]-\left[(UQ)_i+\frac{1}{2}\Psi\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)\Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}\right]}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \qquad (۲۹)$$

که در این معادله $(UQ)_i$ با استفاده از معادله‌ی (۲۳) به دست می‌آید. عبارت جابجایی $\Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}$ به قرار معادله‌ی زیر خواهد بود:

$$\Delta(UQ)_{i+\frac{1}{2}}=\begin{cases}(UQ)_{i+\frac{1}{2}}-(UQ)_{i-\frac{1}{2}} & \text{if} \quad \dfrac{U_{i-\frac{1}{2}}+U_{i+\frac{1}{2}}}{2}\geq 0\\[2ex] (UQ)_{i+\frac{3}{2}}-(UQ)_{i+\frac{1}{2}} & \text{if} \quad \dfrac{U_{i-\frac{1}{2}}+U_{i+\frac{1}{2}}}{2}<0\end{cases} \qquad (۳۰)$$

همسازی داده‌ها در نقطه‌ی $x_{i+\frac{1}{2}}$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$r_{i+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\dfrac{U_{i-\frac{1}{2}}-U_{i-\frac{3}{2}}}{U_{i+\frac{1}{2}}-U_{i-\frac{1}{2}}} & \text{if} \quad \dfrac{U_{i-\frac{1}{2}}+U_{i+\frac{1}{2}}}{2}\geq 0\\[2ex] \dfrac{U_{i+\frac{1}{2}}-U_{i-\frac{1}{2}}}{U_{i+\frac{3}{2}}-U_{i+\frac{1}{2}}} & \text{if} \quad \dfrac{U_{i-\frac{1}{2}}+U_{i+\frac{1}{2}}}{2}<0\end{cases} \qquad (۳۱)$$

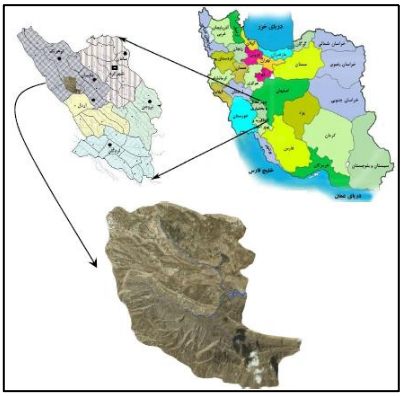
شبیه‌سازی عددی

بازه‌ی مورد مطالعه

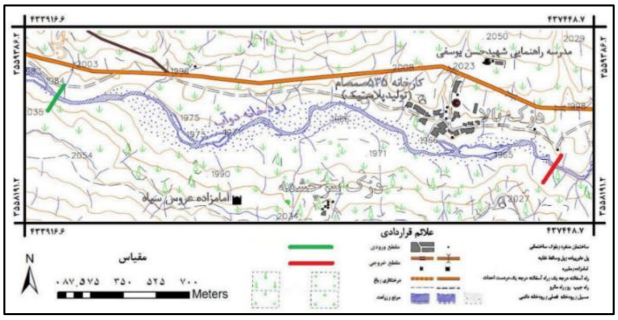
در این تحقیق، به منظور ارزیابی مدل‌های عددی صریح و ضمنی برای روندیابی جریان غیردائمی، از داده‌های حوضه دوآب صمصامی که یکی از زیرحوضه‌های کارون بزرگ هست استفاده شده است. این حوضه آبریز با مساحتی معادل ۱۷۷ کیلومترمربع در قسمت غربی استان چهارمحال بختیاری و در فاصله حدود ۱۰۰ کیلومتری شهرکرد واقع شده است (شکل ۲). این حوزه از لحاظ جغرافیایی در حدفاصل طول‌های شرقی "۲ ′۱۰ °۵۰ شرقی تا "۱۷ ′۲۶ °۵۰ و عرض‌های شمالی "۱۶ ′۵ °۳۲ تا "۱ ′۱۵ °۳۲ واقع شده است. شیب متوسط حوضه ۱۷ درصد است. دزداران و کوفی دو چشمه پر آب هستند که از به هم پیوستن آن‌ها به یکدیگر در مجاورت روستای صمصامی رودخانه دوآب صمصامی شکل می‌گیرد. طول رودخانه‌های دزداران، کوفی و دوآب صمصامی به ترتیب ۹، ۱۳ و ۱۴ کیلومتر است. در این تحقیق، از داده‌های ثبت شده در بازه‌ای از رودخانه دوآب صمصامی به طول ۳/۵ کیلومتر در حدفاصل پایین‌تر از اتصال رودخانه‌های آب کوفی و آب‌دزداران در موقعیت جغرافیایی "۳ ′۱۸ °۵۰ طول شرقی و "۵۵ ′۹ °۳۲ عرض شمالی تا مجاورت پل دزک سفلی در موقعیت جغرافیایی "۴ ′۲۰ °۵۰ طول شرقی تا "۴۰ ′۹ °۳۲ عرض شمالی استفاده شده است. بازه‌ی مورد مطالعه به لحاظ داشتن دشت‌های سیلابی وسیع و همچنین وجود اراضی کشاورزی و مزارع پرورش ماهی در حاشیه رودخانه از اهمیت خاصی برای مطالعات پخش سیلاب برخوردار است. در شکل ۳ موقعیت بازه مورد مطالعه با نقشه توپوگرافی با مقیاس ۱:۲۵۰۰۰ نشان داده شده است. این بازه به ۱۳ زیربازه با استفاده از ۱۴ مقطع عرضی به گونه‌ای تقسیم‌بندی شده است که مشخصات آن‌ها از قبیل شیب، تغییرات زبری، تغییرات عرض و ... همگن باشند. شکل ۴ موقعیت مقاطع عرضی برداشت شده در بازه مطالعاتی را نشان می‌دهد. در شکل ۵ مقاطع عرضی ابتدایی و انتهایی بازه مورد مطالعه نشان داده شده است. جدول ۱ فاصله‌ی بین مقاطع عرضی و شیب هر زیربازه را نشان می‌دهد. به منظور بستن معادلات، از روابط به دست آمده بین عمق و سایر خصوصیات هیدرولیکی جریان در قالب معادله‌ی برازش یافته‌ی نمایی $\Phi=ay^b$ در هر مقطع استفاده شد که در معادله Φ بیانگر خصوصیات جریان شامل مساحت مقطع عرضی، عرض سطح آب، محیط خیس شده و سرعت جریان است. ضرایب a و b برای چهارده مقطع عرضی در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

واسنجی و صحت‌سنجی مدل

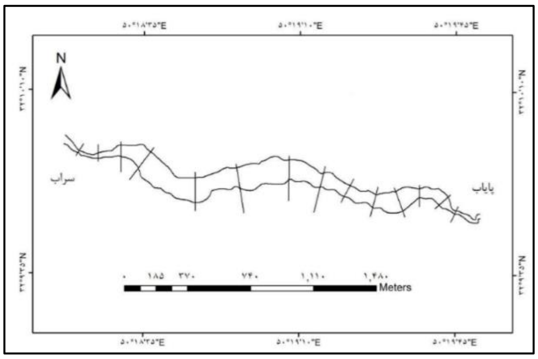
ضریب زبری مانینگ، پارامتری بوده است که در مرحله واسنجی و صحت‌سنجی مدل‌های صریح معکوس ونیمه‌ضمنی مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور از یک هیدروگراف همزمان ثبت شده در دو مقطع ورودی و خروجی برای واسنجی و صحت‌سنجی مدل‌ها استفاده شد. این هیدروگراف در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند.



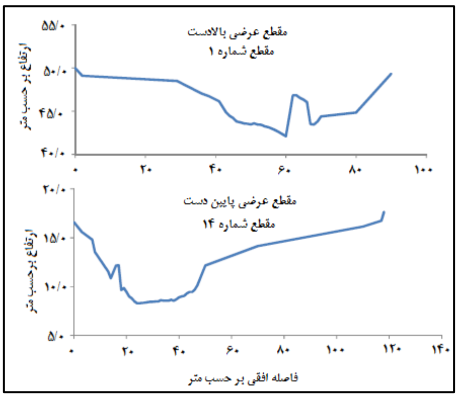
شکل ۲- موقعیت زیرحوضه دوآب صمصامی در استان چهارمحال و بختیاری



شکل ۳- بازه‌ی مورد مطالعه در رودخانه‌ی دوآب صمصامی



شکل ٤- پلان و موقعیت مقاطع عرضی بازه‌ی مورد مطالعه



شکل ۵- نقشه مقاطع عرضی سراب و پایاب در بازه مورد مطالعه

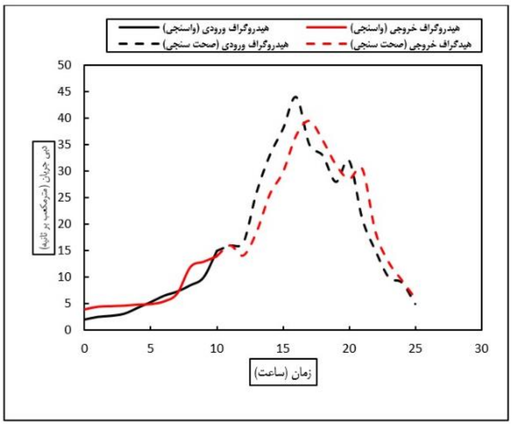
جدول ۱- خصوصیات مقاطع عرضی برداشت شده در بازه مورد مطالعه

زیربازه	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
Δx	۱۵۵	۱۹۰	۲۱۵	۴۷۰	۳۵۵	۴۱۵	۲۶۵	۳۲۵	۱۳۵	۱۹۵	۱۶۵	۲۰۰	۱۲۵
$S_o \times 10^{-3}$	۱۶/۱	۱۴/۲	۱۰/۲	۸/۵	۶/۸	۸/۴	۰/۰۱۰۲	۱۰/۲	۸/۹	۱۰/۳	۱۴/۵	۱۴	۱۷/۶

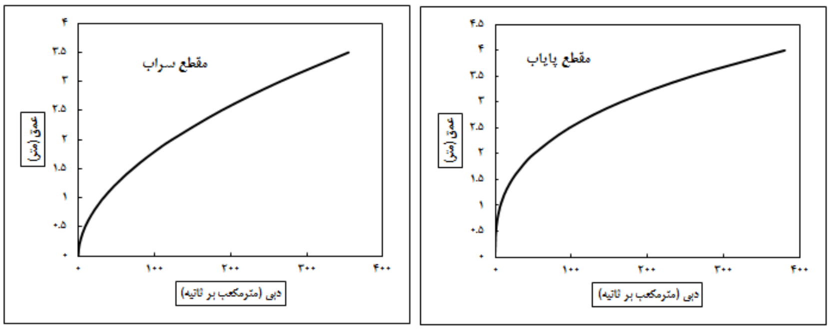
جدول ۲- ضرایب a و b برای معادله برازش یافته نمایی بین عمق جریان و پارامترهای هیدرولیکی مقاطع عرضی

شماره مقطع	A		T		U		P	
	a	b	a	b	a	b	a	b
۱	۱۶/۷۲۶	۱/۳۴۹۴	۱۹/۶۳۳	۰/۴۸۲۱	۱/۲۶۷۴	۰/۶۸۳۷	۵۰/۶۷۶	۰/۵۳۳۵
۲	۳۲/۲۸۲	۱/۶۵۶۶	۵۰/۳۶۲	۰/۶۶۰۱	۲/۸۰۰۹	۰/۲۳۶۷	۳۹/۱۵۵	۱/۳۲۱۴
۳	۲۶/۱۰۲	۱/۹۸۴۶	۸۰/۸۷۴	۰/۱۰۰۹	۱/۷۸۹۷	۰/۹۴۲۲	۴۵۴/۶۶	۰/۵۸۶۹
۴	۳۵/۰۹۶	۲/۵۷۰۵	۱۱۰/۶۱	۱/۰۱۵۹	۰/۶۸۵۳	۲/۸۶۴	۶۴۲/۳	۱/۳۲۴۳
۵	۴۸/۸۹۹	۱/۷۸۴۴	۹۱/۳۴	۰/۶۱۶۷	۲/۳۰۰۶	۰/۵۸۱۷	۱۰۱/۰۶	۰/۹۱۹۳
۶	۱۹/۶۶۸	۲/۷۴۲۶	۹۰/۱۶۳	۰/۷۳۹	۱/۴۷۵۲	۱/۰۱۸۹	۷۶/۵۵۲	۱/۳۲۵
۷	۲/۵۷۵۳	۲/۷۲۰۲	۵۵/۶۱	۰/۸۳۸۱	۰/۶۱۳	۱/۵۷۵۴	۳۶/۳۷۴	۱/۴۶
۸	۳۲/۵۶۹	۲/۳۲۹۵	۷۸/۸۹۱	۱/۲۷۷۳	۱/۳۰۶۳	۰/۸۲۳۸	۱۶۲/۳۷	۱/۰۷۸۳
۹	۷۳/۷۰۹	۲/۰۰۹۳	۱۵۵/۲۵	۰/۷۴۶۲	۱/۷۹۹۱	۰/۹۲۸	۱۸۸/۳۹	۱/۰۶۹۹
۱۰	۱۴/۸۳۷	۴/۰۳۸۲	۱۵۱/۸۱	۱/۱۷۴۳	۰/۶۹۹۵	۲/۱۲۰۳	۱۹۴/۰۹	۱/۰۳۹۹
۱۱	۵/۳۱۴۶	۳/۲۵۳۴	۶/۲۲۸۸	۳/۴۰۳۴	۲/۲۹۳۸	۰/۱۸۴۱	۶/۱۳۲۱	۴/۰۲۷۶
۱۲	۷/۸۴۴۵	۵/۵۶۴۹	۶۲/۳۳۵	۰/۲۲۹۶	۱/۱۴۶۷	۱/۱۵۰۳	۶۴/۵۸۷	۰/۸۷۰۷
۱۳	۸/۹۶۵۳	۰/۹۵۱۳	۹/۱۰۷۵	۱/۶۴۳۱	۲/۷۶۴۹	۰/۳۴۷۳	۱۱/۸۶۸	۱/۸۷۷۶
۱۴	۳/۶۱۸۱	۲/۱۹۲۳	۱۹/۰۵۵	۰/۴۹۱۸	۱/۴۴۳۳	۰/۸۵۴۷	۱۶/۱۶۱	۱/۱۳۱۳

از قسمتی از داده‌های هیدروگراف برای واسنجی و مابقی داده‌ها برای صحت‌سنجی استفاده شدند. با اعمال تغییرات در میزان ضریب زبری مانینگ با توجه به خصوصیات مواد بستری بازه‌ی مورد مطالعه، مقدار شاخص‌های ارزیابی عملکرد مدل محاسبه می‌شود. این تغییرات تا رسیدن به بالاترین مقدار شاخص‌های ارزیابی عملکرد ادامه پیدا می‌کند. لازم به ذکر است در مدل صریح معکوس روندیابی از پایین‌دست به بالادست و در مدل نیمه‌ضمنی روندیابی از بالادست به پایین‌دست انجام شده است. در مدل صریح معکوس در مرز پایین‌دست و بالادست از منحنی دبی-اشل برای تعیین عمق جریان استفاده شده است که در شکل ۷ نشان داده شده‌اند. منحنی دبی-اشل مقطع پایین‌دست به عنوان شرط مرزی مدل نیمه‌ضمنی استفاده شد.



شکل ٦- هیدروگراف ورودی و خروجی از بازه برای واسنجی و صحت‌سنجی دو مدل



شکل ۷- منحنی دبی-اشل در مقاطع بالادست و پایین‌دست بازه‌ی مورد مطالعه

شاخص‌های ارزیابی عملکرد مدل‌ها

عملکرد هر دو مدل در با استفاده از شاخص‌های ضریب ناش- ساتکلیف (N.S)، ضریب تبیین (R^2)، مجذور میانگین مربعات خطا (RMSE) و مجذور میانگین مربعات خطای نرمال شده (NRMSE) با فرمول‌های زیر مورد ارزیابی قرار گرفت:

$$N.S.=1-\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_{oi}-X_{ei})^2}{\sum_{i=1}^{N}(X_{oi}-\bar{X}_o)^2} \tag{۳۲}$$

$$R^2=\frac{[\sum_{i=1}^{N}(X_{oi}-\bar{X}_o)(X_{ei}-\bar{X}_e)]^2}{\sum_{i=1}^{N}(X_{oi}-\bar{X}_o)^2\sum_{i=1}^{N}(X_{ei}-\bar{X}_e)^2} \tag{۳۳}$$

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_o-X_e)^2}{N}} \tag{۳۴}$$

$$NRMSE=\frac{RMSE}{\bar{X}_o}\times 100 \tag{۳۵}$$

که در این معادلات X_o و X_e به ترتیب مقدار دبی مشاهداتی و پیش‌بینی شده، $\bar{X}_o$ و $\bar{X}_e$ به ترتیب مقدار متوسط دبی مشاهداتی و پیش‌بینی شده هستند. چنانچه مقدار ضریب .N.S برابر با یک باشد نشان از تناسب کامل بین داده‌های مشاهداتی و پیش‌بینی شده دارد. مقدار .N.S صفر نیز نشان می‌دهد که میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده و شبیه‌سازی شده دارای انطباق مناسبی هستند. اگر .N.S بزرگتر از ۰/۷۵ باشد، نتایج شبیه‌سازی خوب توصیف می‌شود، اما زمانی که مقادیر .N.S بین ۰/۳۶ و ۰/۷۵ است، نتایج مدل رضایت بخش به شمار خواهد رفت. مقدار منفی این ضریب حاکی از عدم کارآیی مدل می‌باشد. ضریب تبیین R^2 نیز در محدوده [۰،۱] میزان انطباق داده‌های مشاهداتی و محسباتی را نشان می‌دهد. هر چه مقدار این ضریب به ۱ نزدیک‌تر باشد به انطابق کامل‌تر داده‌ها دلالت خواهد شد. مقدار NRMSE طبق محدوده‌های زیر، دقت مدل را پیش‌بینی می‌کند (Mihob et al., 2016):

کارکرد عالی: اگر NRMSE<۱۰٪

کارکرد خوب: اگر ۱۰٪<NRMSE<۲۰٪

کارکرد متوسط: اگر ۲۰٪<NRMSE<۳۰٪

کارکرد ضعیف: اگر NRMSE>۳۰٪

اما نکته‌ای که باید به آن توجه داشت اینکه شاخص‌های ذکر شده در معادلات (۳۲) تا (۳۵) بیان کننده میزان خطای متوسط مدل هستند و هیچ گونه اطلاعاتی در خصوص توزیع خطا ارائه نمی‌دهند. بنابراین استفاده از معیاری که قابلیت ارزیابی قدرت مدل در میزان شبیه‌سازی را ارزیابی کند از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. بدین منظور وایت و همکاران رابطه‌ی زیر را ارائه نمودند (White et al., 1973):

$$DR=Log\left(\frac{\text{مقدار پیش بینی شده}}{\text{مقدار مشاهده شده}}\right) \tag{۳۶}$$

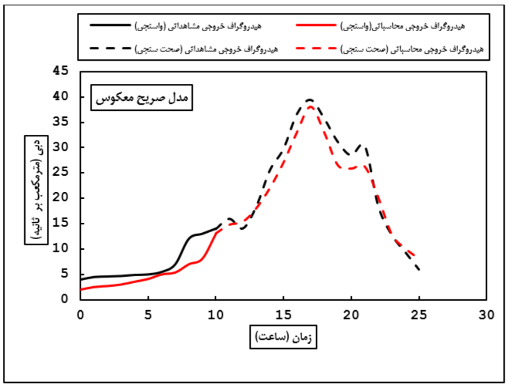
این شاخص به عنوان معیاری برای خطا توسط محققین مختلفی مانند سئو و چئونگ، دنگ و همکاران، کاشفی‌پور و فالکونر، تیفور و سینگ مورد استفاده قرار گرفته است (Seo and Cheong, 1998، Kashefipour and Falconer, 2002، Deng et al., 2002، Tayfurand Singh, 2005). اما یکی از محدودیت‌های این معیار عدم قابلیت آن برای مقایدر منفی است. برای غلبه بر این مشکل، شاخص اختلاف توسعه یافته‌ی نسبی (DDR)[1] توسط نوری و همکاران ارائه شد (Noori et al., 2010):

$$DDR=\frac{\text{مقدار پیش بینی شده}}{\text{مقدار مشاهده شده}}-1 \tag{۳۷}$$

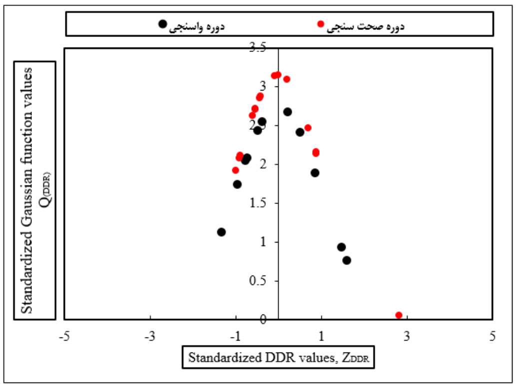
به منظور قضاوت بهتر بر اساس شاخص DDR، تابع گوسین مقادیر DDR محاسبه می‌شود. برای نیل به این هدف در ابتدا باید مقادیر DDR استاندارد شوند. سپس با استفاده از تابع گوسین، مقادیر استاندارد شده DDR محاسبه می‌شوند. درنهایت منحنی تغییرات مقادیر تابع گوسین استانداردشده (روی محور عمودی) در برابر مقادیر DDR استانداردشده (روی محور افقی) ترسیم می‌شود. تمرکز نقاط حول محور عمودی و همچنین مقادیر بیشتر روی محور عمودی نشان از دقت زیادتر مدل خواهند بود. در شکل ۸ هیدروگراف شبیه‌سازی‌شده برای مدل‌های صریح معکوس نشان داده‌شده است. این هیدروگراف به دو بخش برای انجام مراحل واسنجی و صحت‌سنجی تقسیم‌بندی شده است. در شکل ۹ توزیع خطای مدل

1- Developed discrepancy ratio

صریح معکوس برای هیدروگراف خروجی ارائه‌شده است. جدول ۳ مقادیر عددی شاخص‌های تدقیق را برای مدل صریح معکوس نشان می‌دهد. طبق این جدول، ضریب NS مدل صریح معکوس در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی به ترتیب ۰/۵۲۲۳ و ۰/۹۳۵۲ به‌دست‌آمده است که به ترتیب در محدوده‌ی رضایت‌بخش و خوب قرار دارند. مقدار شاخص NRMSE در دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی ۳۵/۰۳ و ۲۴/۶ قرارگرفته است که بیانگر عملکرد ضعیف و متوسط مدل است. مقدار ضریب تبیین ۰/۹۲۳۳ و ۰/۹۸۸۶ برای دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی نیز نشان از انطباق زیاد داده‌های محاسباتی و مشاهداتی دارد. طبق بیشترین مقدار به‌دست‌آمده برای Q_{DDR}، کارکرد مدل در دوره صحت‌سنجی با مقدار ۳/۱۴۶ بهتر از کارکرد آن در دوره واسنجی با مقدار ۲/۶۷۲ بوده است.



شکل ۸- هیدروگراف خروجی شبیه‌سازی‌شده‌ی دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی بازه مورد مطالعه در مدل صریح معکوس



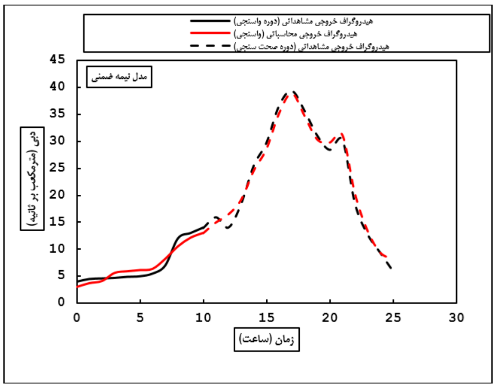
شکل ۹- تغییرات مقدار Q_{DDR} در برابر مقادیر Z_{DDR} برای مدل صریح معکوس

جدول ۳- خلاصه نتایج محاسبات فرآیند واسنجی و صحت‌سنجی مدل صریح معکوس

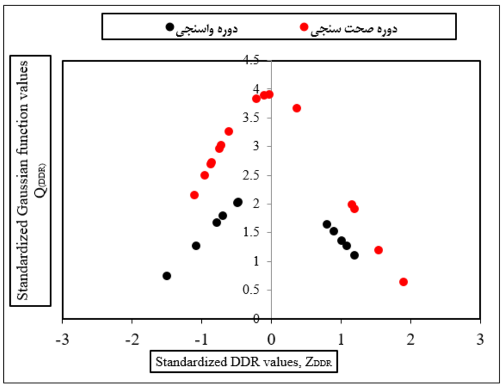
	دوره واسنجی		دوره صحت‌سنجی	
	مشاهداتی	محاسباتی	مشاهداتی	محاسباتی
تعداد داده	۱۰		۱۵	
متوسط	۷/۲	۵/۱۲	۲۳/۵	۲۲/۰۳
ماکزیمم	۱۴	۱۳	۳۹/۴۵	۳۸
مینیمم	۴	۲	۶	۸
انحراف معیار	۳/۸۲۳	۳/۲۴	۱۰/۵۹	۸/۹۳۵
N.S	۰/۸۲۲۳۵		۰/۹۳۵۲	
R^2	۰/۹۲۳۳		۰/۹۸۸۶	
RMSE	۲/۵۲۲		۲/۶۰۴	
NRMSE	۳۵/۰۳		۲۴/۶	
$Q_{DDR\ (max)}$	۲/۶۷۲		۳/۱۴۶	

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده در جدول ۳ برای مدل صریح معکوس، عملکرد آن در دوره‌ی صحت‌سنجی نسبت به دوره واسنجی بهتر شده است. در مجموع می‌توان گفت عملکرد مدل صریح معکوس قابل‌قبول بوده است.

شکل ۹ هیدروگراف‌های شبیه‌سازی‌شده در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی را با استفاده از مدل نیمه ضمنی نمایش می‌دهد. توزیع خطای مدل نیمه ضمنی در شکل ۱۱ به نمایش در آمده است. جدول ۴ خلاصه‌ی شاخص‌های تدقیق آماری را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰- هیدروگراف خروجی مشاهداتی و محاسباتی دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی بازه‌ی موردمطالعه در مدل نیمه ضمنی



شکل ۱۱- تغییرات مقدار Q_{DDR} در برابر مقادیر Z_{DDR} برای مدل نیمه ضمنی

مدل نیمه ضمنی طبق شاخص‌های تدقیق به‌دست‌آمده در جدول ۴ از دقت و عملکرد بسیار مطلوب‌تری هم در دوره واسنجی و هم در دوره‌ی صحت‌سنجی برخوردار است. مقدار ضریب NS در دوره واسنجی و صحت‌سنجی به ترتیب ۰/۹۲۳۷ و ۰/۹۸۴۳ به دست آمده است که نشان‌دهنده عملکرد بسیار مطلوب مدل است. مقادیر ۱۴/۰ و ۱۲/۱ برای شاخص NRMSE نیز به ترتیب در دوره‌های واسنجی و صحت‌سنجی مبین کارکرد خوب مدل می‌باشند. چون مقدار Q_{DDR} در فرآیند صحت‌سنجی (۳/۹۰۹) بیشتر از مقدار آن در دوره واسنجی (۲/۰۲۸) است نشان‌دهنده‌ی دقت بالای مدل نیمه ضمنی در فرایند صحت‌سنجی نسبت به فرآیند واسنجی است. از داده‌های این جدول می‌توان نتیجه گرفت عملکرد مدل نیمه ضمنی بسیار مطلوب و قابل‌قبول بوده است. در جدول ۵ مقادیر ضریب زبری واسنجی و صحت‌سنجی شده در هر یک از زیربازه‌ها ارائه شده است.

در شکل ۱۲، هیدروگراف سیلاب ورودی و خروجی مشاهداتی برای ارزیابی مدل‌ها نشان داده شده است. علاوه بر دو مدل صریح معکوس و نیمه ضمنی، شبیه‌سازی این دو هیدرگراف توسط مدل HEC-RAS نیز انجام شد. شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ به ترتیب عملکرد شبیه‌سازی مدل‌های HEC-RAS، نیمه ضمنی و صریح معکوس را نشان می‌دهند. در این سه شکل، دبی‌های مشاهداتی و محاسباتی در یک محور مختصات ترسیم شده‌اند و پراکنش آن‌ها حول خط راست با شیب ۱:۱ نمایش داده است. شکل ۱۶ منحنی Q_{DDR}-Z_{DDR} را برای هر سه مدل نشان می‌دهد. بیشترین مقدار Q_{DDR} برای مدل‌های HEC-RAS، نیمه ضمنی و صریح معکوس به ترتیب ۱۶/۴۹، ۳/۷۱۳ و ۲/۶۱۱ هستند.

جدول ٤- خلاصه نتایج محاسبات فرآیند واسنجی و صحت‌سنجی مدل ضمنی

	دوره واسنجی		دوره صحت‌سنجی	
	مشاهداتی	محاسباتی	مشاهداتی	محاسباتی
تعداد داده	۱۰		۱۵	
متوسط	۷/۲	۷/۱۴	۲۳/۵	۲۳/۶۹
ماکزیمم	۱۴	۱۳	۳۹/۴۵	۳۸/۹
مینیمم	۴	۳	۶	۸/۲
انحراف معیار	۳/۸۲۳	۳/۳۹۳	۱۰/۵۹	۹/۸۵۷
N.S	۰/۹۲۳۷		۰/۹۸۴۳	
R^2	۰/۹۶۴۴		۰/۹۹۴۳	
RMSE	۱/۰۱		۱/۲۸۳	
NRMSE	۱۴/۰		۱۲/۱	
$Q_{DDR\ (max)}$	۲/۰۲۸		۳/۹۰۹	

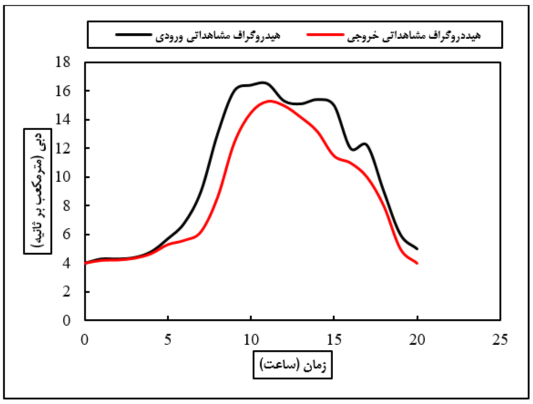
جدول ٥- ضریب زبری زیربازه‌های محدوده مورد مطالعه پس از واسنجی و صحت‌سنجی

شماره زیر بازه	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
ضریب زبری	۰/۰۲۹	۰/۰۲۶	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۶	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۰۲۵	۰/۰۲۷	۰/۰۲۷	۰/۰۲۹	۰/۰۳۴

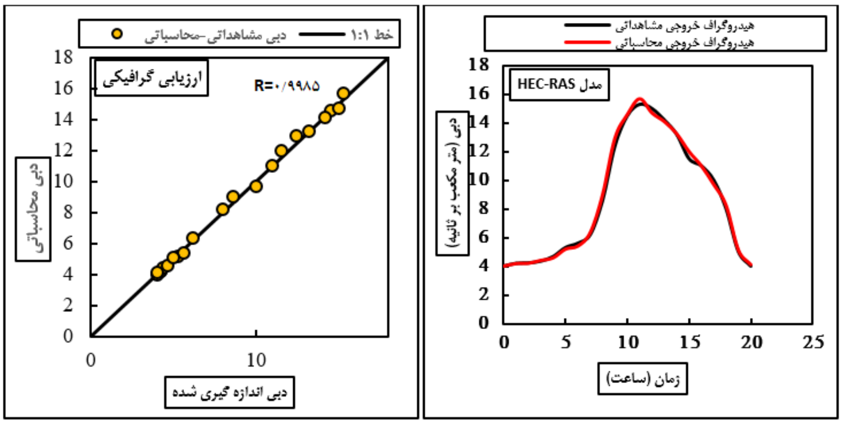
همان‌طور که مشخص هست عملکرد مدل HEC-RAS نسبت به مدل‌های نیمه ضمنی و صریح معکوس بسیار بهتر است. در مقام مقایسه، مدل نیمه ضمنی نیز کارکرد بسیار مناسب‌تری نسبت به مدل صریح داشته است. خلاصه نتایج مقادیر شاخص‌های تدقیق هیدروگراف شکل ۱۲ در جدول ۶ ارائه شده‌اند. مقدار ضریب NS در هر سه مدل بیشتر از ۰/۷۵ است. دو مدل ضمنی و صریح معکوس عملکرد مناسبی برای شبیه‌سازی هیدروگراف سیل دارند اما دقت مدل نیمه ضمنی بیشتر از مدل صریح معکوس است.

نتیجه‌گیری

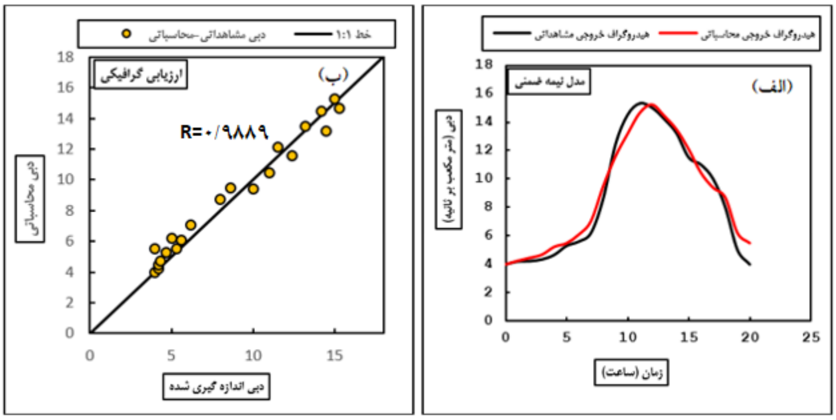
روندیابی سیلاب از طریق حل معادلات سنت‌ونانت به کمک روش‌های عددی صریح و ضمنی موضوع اصلی این پژوهش است. روش صریح مبتنی بر الگوی پرایزمن به‌صورت روندیابی معکوس مورد استفاده قرار گرفته است. مدل عددی نیمه ضمنی نیز مبتنی بر الگوی پرایزمن و به‌کارگیری الگوی Upwind ارائه شده است. همچنین برای بستن معادلات به دست آمده از این مدل، از معادلاتی که بین عمق جریان و دیگر خصوصیات هیدرولیکی جریان به دست آمد، استفاده گردید. نتایج زیر از انجام این پژوهش حاصل شد:



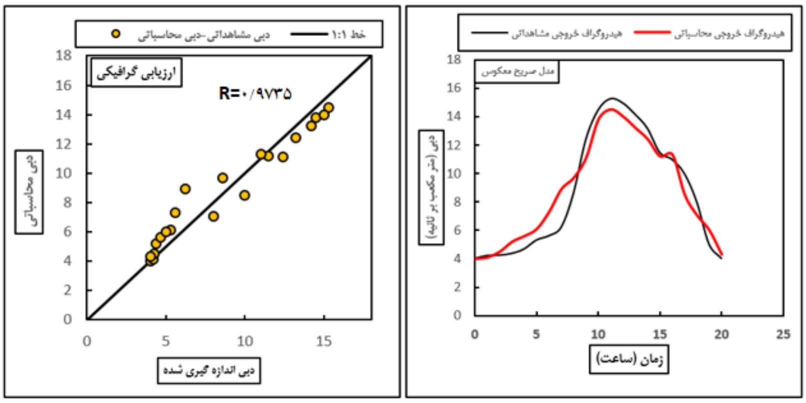
شکل ۱۲- هیدروگراف ورودی و خروجی مشاهداتی برای ارزیابی مدل‌ها بعد از واسنجی و صحت‌سنجی



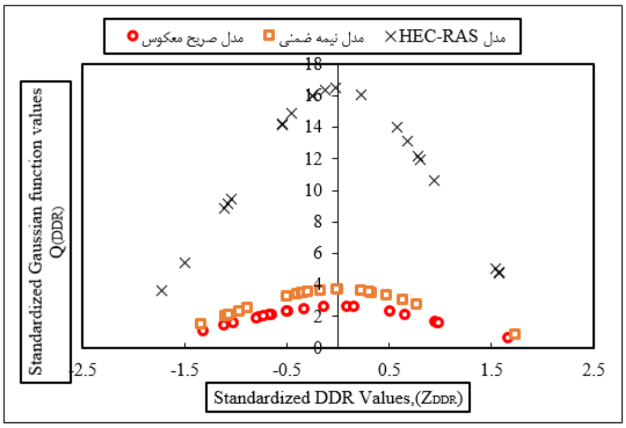
شکل ۱۳- (الف) هیدروگراف شبیه‌سازی شده توسط HEC-RAS (ب) ارزیابی گرافیکی دقت مدل



شکل ١٤- (الف) هیدروگراف شبیه‌سازی شده توسط مدل نیمه‌ضمنی (ب) ارزیابی گرافیکی دقت مدل



شکل ۱۵- (الف) هیدروگراف شبیه‌سازی شده توسط مدل صریح معکوس (ب) ارزیابی گرافیکی دقت مدل



شکل ١٦- منحنی توزیع نرمال استاندارد شده DDR مدل‌های پژوهش

جدول ٦- شاخص‌های توابع عملکرد مدل صریح معکوس و نیمه ضمنی

	هیدروگراف مشاهداتی	مدل HEC-RAS	مدل نیمه ضمنی	مدل صریح معکوس
تعداد داده	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱
متوسط	۸/۶۳		۸/۸۴۸	۸/۷۰۳
ماکزیمم	۱۵/۳	۱۵/۶۹	۱۵/۲۵	۱۴/۵
مینیمم	۴/۰	۴/۰	۴/۰	۴/۰
انحراف معیار	۴/۲۲۵	۴/۲۷۷	۳/۸۹۲	۳/۶۲۲
N.S	-	۰/۹۹۶۶	۰/۹۷۰	۰/۹۳۳۹
R^2	-	۰/۹۹۸۵	۰/۹۸۹۰	۰/۹۷۳۴
RMSE	-	۰/۲۲۹۴	۰/۷۰۵۳	۱/۰۶
NRMSE	-	۲/۷۵۱	۸/۱۷۲	۱۲/۲۸
$Q_{DDR\ (max)}$	-	۱۶/۴۹	۳/۷۱۳	۲/۶۱۲

عملکرد هر دو مدل در طی فرایندهای واسنجی و صحت‌سنجی به کمک پارامتر ضریب زبری جریان در طول بازه‌ای به طول ۳/۷ کیلومتر و مشتمل بر ۱۴ مقطع عرضی با استفاده از توابع ارزیابی عملکرد (NS، $R^۲$، RMSE، NRMSE، Q_{DDR}) از طریق شبیه‌سازی یک هیدروگراف مشاهداتی انجام شد. مقدار ضرایب تدقیق پنج‌گانه برای مدل صریح معکوس در دوره‌ی واسنجی و صحت‌سنجی به ترتیب (۰/۵۲۲۳۵، ۰/۹۲۳۳، ۲/۵۲۲، ۳۵/۰۳، ۲/۶۷۲) و (۰/۹۳۵۲، ۰/۹۸۸۶، ۲/۶۰۴، ۲۴/۶، ۳/۱۴۶) و برای مدل نیمه ضمنی نیز به ترتیب مذکور (۰/۹۲۳۷، ۰/۹۶۴۴، ۱/۰۱، ۱۴، ۲/۰۲۸) و (۰/۹۸۴۳، ۰/۹۹۴۳، ۱/۲۸۳، ۱۲/۱، ۳/۹۰۹) محاسبه شدند. با توجه به مقدار هر کدام از شاخص‌های تدقیق، هر دو مدل دارای عملکرد مناسبی در فرآیندهای واسنجی و صحت‌سنجی بودند ضمن اینکه مدل نیمه ضمنی برتری محسوسی نسبت به مدل صریح داشت.

برای اطمینان از کارکرد مدل‌های به دست آمده، هیدروگراف دیگری نیز در همان بازه شبیه‌سازی شد. در این مرحله از مدل یک بعدی HEC-RAS نیز برای ارزیابی نتایج شبیه‌سازی دو مدل این پژوهش استفاده شد. مقدار ضرایب تدقیق پنج‌گانه فوق‌الذکر برای مدل HEC-RAS، نیمه ضمنی و صریح معکوس به ترتیب (۰/۹۹۶۶، ۰/۹۹۸۵، ۰/۲۲۹۴، ۲/۷۵۱، ۱۶/۴۹)، (۰/۹۷، ۰/۹۸۹، ۰/۷۰۵۳، ۸/۱۷۲، ۳/۷۱۳) و (۰/۹۳۳۹، ۰/۹۷۳۴، ۱/۰۶، ۱۲/۲۸، ۲/۶۱۲) به دست آمدند. اگرچه مقادیر Q_{DDR} مدل HEC-RAS نسبت به دو ارائه شده در این پژوهش بسیار زیاد است اما مقادیر دیگر شاخص‌ها نشان از کارایی دو مدل ضمنی و صریح معکوس در مقام مقایسه با مدل یک بعدی HEC-RAS دارد. البته باید توجه داشت که مدل نیمه ضمنی برتری بیشتری نسبت به مدل صریح معکوس دارد.

پایداری حل علاوه بر راندمان محاسباتی بالا از جمله مزایای روش نیمه ضمنی است. اما منتهی شدن به معادلات غیرخطی پیچیده کوپلی که باید برای تعیین مقدار دبی و سرعت جریان حل شوند از محدودیت‌های استفاده از روش نیمه ضمنی است. البته باید توجه داشت به دلیل عدم وجود محدودیت در اندازه گام زمانی، این روش از سرعت حل بیشتری برخوردار است.

سپاسگزاری

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی داخلی با عنوان «توسعه

مدل‌های عددی نیمه ضمنی و صریح معکوس در روندیابی سیلاب» است که نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامهرمز بابت تأمین کلیه هزینه‌های طرح، تقدیر و تشکر می‌نمایند.

منابع

اکبری، غ.م.، براتی، ر. و حسین‌نژاد، ع.ر. ۱۳۹۰. بررسی شماهای مختلف روش ماسکینگام کونژ در آبراهه‌های طبیعی. مجله تحقیقات منابع آب ایران، ۳.۷: ۶۲-۷۴.

اکبری، غ.ح.، و فیروزی، ب. ۱۳۸۹. بررسی اثر زبری، شیب بستر و عرض رودخانه بر روی روند حرکت موج سیلاب به کمک دو الگوی عددی تفاضل محدود. پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، ۱۴ تا ۱۶ اردیبهشت، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد.

براتی، ر.، و اکبری، غ.ح. ۱۳۹۱. مقایسه مدل‌های هیدرولوژیکی روندیابی سیل در رودخانه‌ها. مجله پژوهش‌های آب ایران، ۶.۱۱: ۱۰۵-۱۱۴.

جاویدان، ن.، و بهره‌مند، ع. ۱۳۹۵. بررسی حساسیت پارامترهای مؤثر بر روندیابی هیدروگراف سیل با روش موج پخشی دیفیوژن با مدل هیدرولوژیکی توزیعی WetSpa در حوزه آبخیز زیارت گرگان. نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)، ۲.۳۰: ۶۸۵-۶۹۷.

حسن‌پور، ف.، و شیخعلیپور ز. ۱۳۹۳. مقایسه روش‌های هوش مصنوعی و ماسکینگهام در تخمین روندیابی سیل. مجله مهندسی آب ایران، ۷: ۹۷-۱۰۸.

ولی‌سامانی، ح.م.، حقیقی، ع.، و فرهادی، ش. ۱۳۹۲. روندیابی هیدرولوژیکی سیل به روش ماسکینگام خطی در سیستم رودخانه‌های چند شاخه‌ای با بهینه‌یابی توسط الگوریتم ژنتیک. مجله هیدرولیک، ۱.۸: ۸۳-۹۲.

Artichowicz W., and Szymkiewicz R. 2014. Computational issues of solving the 1D steady gradually varied flow equation. Journal of Hydrology and Hydromechanics 62.3: 226-233.

Chow V.T. 1959. Open Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York.

Deng Z.Q., Bengtsson L., Singh V.P., and Adrian D.D. 2002. Longitudinal dispersion coefficient in single-channel streams. Journal of Hydraulic Engineering 128: 901–916.

Fennema R.J., and Chaudhry M.H. 1990. Explicit Methods for 2-D Transient Free Surface Flows. Journal of Hydraulic Engineering 116.8: 1013-1027.

Kashefipour M.S., and Falconer R.A. 2002. Longitudinal dispersion coefficients in natural channels. Water Research 36: 1596–1608.

Kranjcevic L., Crnkovic B., and Zic N.C. 2006. Improved implicit numerical scheme for one dimensional open channel flow equation, 5th International Congress of Croatian Society of Mechanics, September 21-23, Croatia.

Mihoub R., Chabour N., and Guermoui M. 2016. Modeling soil temperature based on Gaussian process regression in a semi-arid-climate, case study Ghardaia, Algeria. Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo- Resources 2:397–403.

Noori R., Khakpour A., Omidvar B., and Farokhnia A. 2010. Comparison of ANN and principal component analysis-multivariate linear regression models for predicting the river flow based on developed discrepancy ratio statistic. Expert Systems with Applications 37: 5856-5862.

Seo I.W., and Cheong T.S. 1998. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams. Journal of Hydraulics Engineering 124: 25–32.

Tayfur G., and Singh V.P. 2005. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by artificial neural network. Journal of Hydraulic Engineering 131: 991–1000.

Toro E.F. 1997. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics-A Practical Introduction. Springer Verlag, Berlin.

White W.R., Milli H., and Crabbe A.D. 1973. Sediment transport: An appraisal method, Vol. 2: Performance of theoretical methods when applied to flume and field data. Hydr. Res. Station Rep., No. 1T119, Wallingford, UK.

Wylie E.B. 1969. Control of transient free-surface flow. Hydr. Div. ASCE, 95.1: 347-361.

Yost S.A., and Rao P. 2000. A multiple grid algorithm for one-dimensional transient open channel flows. Advances in Water Resources 23.6: 645-651.

Iranian Journal of Irrigation and Drainage
No. 3, Vol. 14, Agu.-Sept. 2020, p. 750-764

نشریه آبیاری و زهکشی ایران
شماره۳، جلد ۱۴، مرداد - شهریور ۱۳۹۹، ص. ۷۶۴-۷۵۰

Developing Semi-Implicit and Reverse Explicit Numerical Models for Simulation of Hyperbolic Saint-Venant Equations

M.R. Heidari Tavani[1]*, M. Fuladipanah[2]

Recived: Mar.06, 2020 Accepted: Apr.22, 2020

Abstract

New developed numerical models for solving hyperbolic Saint-Venant equations while having scientific and research value, play a significant role in the structural and performance management of hydraulic structures. In this paper, while developing two reverse explicit and semi-implicit numerical models based on Preissmann four points scheme, their application has been evaluated in a reach of Doab Samsami River, sub basin of Karoon. The reverse explicit has been developed based on Preissmann scheme and semi-implicit model has been developed using Preissmann scheme for distance derivatives with the Upwind scheme. Simulating of an output hydrograph using Manning roughness coefficient as setting parameter was performed with five accuracy criteria Nash-Sutcliff (NS), R-square (R^2), Root mean square error and its standardized value (RMSE, NRMSE) and Developed discrepancy ratio (Q_{DDR}) for two calibration and verification periods. The amount of mentioned criteria for explicit and implicit models were calculated as (0.9352,0.9886,2.604,24.6,3.146) and (0.9843,0.9943,1.283,12.1,3.909) illustrating the reliable performance of the two models with the tangible superiority of the semi-implicit model. For more assurance of models performance, another hydrograph was simulated so that the values of NS, NRMSE and Q_{DDR} for semi-implicit and reverse explicit models were calculated (0.97,8.172,3.713) and (0.9339,12.28,2.612), respectively. These values proved the reliability and performance of the two models. The semi-implicit model had more accuracy than the explicit one in all cases. Solution stability in addition to high calculation efficiency is advantages of the semi-implicit model while leading to coupled complicated non-linear equations is its restriction.

Keywords: Flood Routing, Discretization, Saint-Venant Equations, Numerical Modeling, Prissmann scheme

1- Assistant Professor, Department of Mathematic, Ramhormoz Branch, Islamic Azad university, Ramhormoz, Iran
2- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Ramhormoz Branch, Islamic Azad university, Ramhormoz, Iran
(*- Corresponding Author Email: m.reza.h56@gmail.com)