Iranian Journal of Irrigation and Drainage
No. 3, Vol. 12, Agu.-Sep. 2018, p. 512-524

نشریه آبیاری و زهکشی ایران
شماره۳، جلد ۱۲، مرداد - شهریور ۱۳۹۷، ص. ۵۲۴-۵۱۲

روش بدون شبکه محلی پترووـ گالرکین برای شبیه‌سازی جریان‌های آب‌های کم‌عمق در شرایط غیرماندگار

سعید دیمه‌ور [۱] ، ابوالفضل اکبرپور [۲]*، مهدی ملازاده [۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۹/۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۹/۱۶

چکیده

اهمیت جریان آب کم‌عمق در مهندسی آب موجب شده است که معادلات حاکم بر آن با روش‌های گوناگونی مورد بررسی قرار گیرد. روش‌های عددی هم‌چون اجزا محدود از جمله این روش‌ها است. این روش‌ها با شبکه‌بندی دامنه محاسباتی، معادلات دیفرانسیل را در شرایط ساده و پیچیده هندسی حل می‌کنند. اخیرا محققان برای حل معادلات دیفرانسیل از روش‌های بدون شبکه که به شبکه‌بندی دامنه حل نیاز ندارند، در شرایط ساده و پیچیده هندسی استفاده می‌کنند. در این تحقیق معادلات حاکم بر آب‌های کم عمق با استفاده از روش بدون شبکه پترووـ گالرکین با تابع تقریب حداقل مربعات متحرک مدل‌سازی شد. سپس به حل مثال جابجایی در میدان سرعت متغیر پرداخته شد و میزان خطای مدل محاسبه شد و مشخص گردید که مدل از دقت خوبی برخوردار است به طوری‌که میزان خطای میانگین و خطای میانگین مجذور مربعات به ترتیب ۰/۰۳۲۶- و ۰/۱۵۶۲۷ متر بود. سپس جریان عبور آب از روی سرریز سد سیاه بیشه مورد بررسی قرار گرفت و نتایج بدست آمده از مدل با مقادیر اندازه‌گیری شده مقایسه گردید. که موید دقت حل معادلات آب‌های کم‌عمق را با روش پترووـ گالرکین می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: آب‌های کم‌عمق، تابع شکل حداقل جذر مربعات متحرک، روش بدون شبکه پترووـ گالرکین

مقدمه

بررسی جریان عبوری از روی سطوح و سازه‌های هیدرولیکی مختلف، پدیده فیزیکی مورد علاقه بسیاری از دانشمندان و مهندسان می‌باشد. برای مثال جریان‌هایی هم‌چون جزر و مد اقیانوس‌ها، موج‌های ناشی از وزش باد، موج‌های ناشی از شکست سد، سیلاب‌های رودخانه‌ای و عبور جریاب آب از روی سرریزها نمونه‌هایی از این پدیده فیزیکی می‌باشند (رحمانی و فرویزی ۱۳۹۲). به طور کلی جریان در کانال‌های روباز، توسط معادلات آب‌های کم‌عمق مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. این معادلات، از معادلات سه‌بعدی تراکم‌ناپذیر نیویر - استوکس [۴] بافرض فشار هیدرواستاتیک، به‌دست می‌آید. نظر به کاربرد و اهمیت فراوان این معادلات در مهندسی آب، طی سال‌های گذشته محققان روش‌های عددی مختلفی برای تحلیل آن ارایه کردند. از جمله این روش‌ها می‌توان به اجزا محدود، تفاضلات محدود و حجم محدود اشاره کرد.

این روش‌ها علی‌رغم مزایای فراوان دارای محدودیت‌هایی می‌باشند که مهم‌ترین آن‌ها نیازمند بودن به شبکه‌بندی دامنه حل است. از جمله مشکلات مرتبط با شبکه‌بندی دامنه حل می‌توان به کاهش دقت محاسبات در حین انتقال اطلاعات از مش‌بندی در مرحله قبلی به مش‌بندی در مرحله جدید اشاره کرد، چون برای انتقال اطلاعات ناچار به استفاده از توابع میانی است بنابراین دقت محاسبات کاهش می‌یابد (محتشمی و همکاران ۱۳۹۶). روش تفاضلات محدود بیش‌تر درحل مسایل دارای دامنه منظم کاربرد دارد و محدود به شبکه‌های مستطیلی است. روش تفاضل محدود به شبکه‌بندی کامل دامنه حل نیازمند است، از این رو در مسایلی که شرایط مرزی مرتبا تغییر می‌کند نیازمند به روز شدن شبکه‌بندی دامنه حل است، که این مسئله امری زمان‌بر و پیچیده است. به همین دلیل اخیرا استفاده از روش‌های بدون شبکه گسترش یافته است.

اولین‌بار جینگولد و موناقان ایده روش‌های بدون شبکه را مطرح کردند. آن‌ها برای مدل‌سازی پدیده‌های نجومی از روش

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش مهندسی و مدیریت منابع آب، دانشگاه بیرجند

۲- دانشیار دانشکده مهندسی گروه عمران، دانشگاه بیرجند

۳- استادیار دانشکده مهندسی گروه عمران، دانشگاه بیرجند

(* نویسنده مسئول: Email:Akbarpour@Birjand.ac.ir)

4- Navier-Stokes

هیدرودینامیک ذرات هموار[1] استفاده کردند (Gingold and Monaghan., 1977). ایده اصلی روش‌های بدون شبکه تقریب‌زنی دامنه مسئله با استفاده از گره‌ها و بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه حل است.

تاکنون برخی محققان سعی بر حل معادلات آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش‌های بدون شبکه کرده‌اند. ژو و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه که بر اساس تابع پایه شعاعی[2] است، معادلات آب‌های کم‌عمق همراه با مرز متحرک[3] را مدل‌سازی کردند. آن‌ها با به کارگیری روش لاگرانژ– اویلر[4] در فرمول‌سازی، حرکت مرز آزاد را ردیابی کرده و مسئله را تبدیل به دامنه مستقل از زمان کردند. سپس نتایج مدل را برای محاسبه جریان سیلاب ناشی از فروپاشی سد و رواناب موج در ساحل استفاده نمودند (Zhou et al., 2004). رودریگز– پاز و بونت با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار اقدام به حل مسایل شکست سد در هندسه‌های مختلف کردند(Rodriguez-Paz and Bonet., 2005). در سال ۲۰۰۶ ارزانی با استفاده از روش حداقل مربعات گسسته[5] همراه با گره‌های ساختار یافته، به آنالیز معادلات آب‌های کم‌عمق پرداخت (Arzani., 2006).

دربانی و همکاران با استفاده از روش المان طبیعی[6] در یک فرمول‌بندی لاگرانژی اقدام به شبیه‌سازی معادلات آب‌های کم‌عمق در یک گرادیان قوی کردند(Darbani et al., 2011). رحمانی و افشار از روش حداقل مربعات گسسته برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق در حالت ماندگار استفاده کردند. آن‌ها برای ساخت دستگاه معادلات، از تابع شکل حداقل مربعات متحرک[7] استفاده نمودند. سپس نتایج بدست آمده را با نتایج تجربی و تحلیلی مقایسه کردند (RahmaniFiroozjaee and Afshar., 2011). رحمانی و فرویزی (۱۳۹۲) معادلات آب‌های کم‌عمق را با استفاده ا زروش بدو نشبکه گالرکین[8] و تابع شکل حداقل مربعات متحرک حل کردند و نتایج حاصله را برای حل مسئله شکست سد به کار بردند.

کرمانی و قیاسی با استفاده از روش المان طبیعی و درون‌یابی سیبسون[9] معادلات آب‌های کم‌عمق را حل کردند. سپس نتایج حاصله را با نتایج حاصل از روش حجم محدود مقایسه کردند (Kermani and Ghiasi., 2016). در این تحقیق با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترووـ گالرکین به حل معادلات آب‌های کم‌عمق پرداخته شد و سپس برای یک مثال استاندارد مورد آزمون قرار گرفت و در نهایت عبور جریان آب از روی سرریز سد سیاه بیشه در حالت دوبعدی و در شرایط غیرماندگار مدل‌سازی شد.

1- Smoothed Particle Hydrodynamics
2- Radial base function
3- Moving Boundary
4- Lagrangian-Eulerian scheme
5- Discrete Least Squares Mesh less
6- Natural Element Method
7- Moving Least Squares
8- Element Free Galerkin
9- Sibson interpolation

مواد و روش‌ها

تابع تقریب حداقل مربعات متحرک

برای اولین بار نیرولز و همکاران از تابع حداقل مربعات متحرک برای ساخت تابع شکل و گسترش روش المان توسعه‌ای[10] استفاده کردند (Nayroles et al., 1992). ایجاد پیوستگی در کل دامنه مسئله برای درون‌یابی تابع میدان و هم‌چنین تقریب‌سازی با هر مرتبه دل‌خواه از سازگاری از مهم‌ترین ویژگی‌های این تابع تقریب است (Liu and Gu., 2005). این ویژگی‌های تابع حداقل مربعات متحرک موجب شد محققان به‌صورت گسترده از آن برای تولید توابع شکل استفاده کنند. به طوری‌که بلچکو و همکاران در روش بدون شبکه گالرکینو آتلوری و ژو در روش بدون شبکه پترووـ گالرکین[11] از تابع حداقل مربعات متحرک برای تولید تابع شکل در روش‌های بدون شبکه خود استفاده کردند (Atluri and Zhu., 2000;Belytschko et al., 1994).

اگر $U(X)$ یک تابع تغییرات میدانی در دامنه مورد بررسی Ω باشد، تقریب $U(X)$ در نقطه X با $U^h(X)$ نشان داده می‌شود. تقریب حداقل مربعات متحرک تابع متغیر میدان را به فرم رابطه ۱ معرفی می‌کند (Belytschko et al., 1994) :

$$U^h(X) = \sum_{j}^{m} p_j(X)a_j(X) = P^T(X)a(X) \tag{۱}$$

که در آن m تعداد تک جمله‌ای‌های تشکیل دهنده $P(X)$ و $a(X)$ بردار ضرایب $P(X)$ است که به صورت رابطه ۲ تعریف می‌شود:

$$a^T(X) = \{a_1(X)a_2(X)\ \dots\ a_m(X)\} \tag{۲}$$

$P(X)$ یک بردار توابع پایه از مرتبه p است که در فضای یک‌بعدی و دوبعدی به صورت رابطه ۳ و ۴ می‌باشد.

$$P^T(X) = \{1\ \ xx^2\ \dots\ x^p\} \tag{۳}$$

$$P^T(X,Y) = \{1\ \ xyx^2xyy^2 \dots\ y^p\} \tag{۴}$$

به طور کلی بردار p بر اساس مثلث خیام پاسکال ساخته می‌شود. برای تعیین ضرایب مجهول $a(X)$ تابع وزن‌دار $J(X)$ که در رابطه ۵ نشان داده شده مینیمم می‌شود (Liu and Gu., 2005) :

10- fDiffuse element method
11- Meshless local Petrov-Galerkin

$$J(X)=\sum_{I}^{n}W(X-X_I)[P^T(X_I)a(X)-U_I]^2 \quad (۵)$$

$$W(X-X_I)=W_I(X) \quad (۶)$$

در رابطه ۵ $W_I(X)$ تابع وزن[۱] مربوط به نقطـه گرهـی I و مقـدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطـه I و مقـدار داده شده در همان نقطه می‌باشند. n نیز تعداد نقاط در دامنه حمـایتی می‌باشد (Liu and Gu., 2005).

به منظور مینیمم کردن تابع $J(X)$ رابطه ۷ بررسی می‌شود.

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0 \quad (۷)$$

که در نهایت رابطه ۸ بدست می‌آید.

$$a(X)=A^{-1}(X)B(X)U_s \quad (۸)$$

در رابطـــه (۸)، $A(X)$ ، $B(X)$ وU_s بصـــورت روابـــط ۹، ۱۰ و ۱۱تعریف می‌شوند.

$$A(X)=\sum_{I}^{n}W(X_I)p(X_I)P^T(X_I) \quad (۹)$$

$$B(X)=[W_1p(x_1)W_2p(x_2)\ \dots\ W_np(x_n)] \quad (۱۰)$$

$$U_s=[U_1U_2\ \ \dots\ \ U_n]^T \quad (۱۱)$$

با جای‌گذاری رابطه ۸ در رابطه ۱ تقریب حداقل مربعات متحرک به صورت روابط ۱۲ و ۱۳ ارایه می‌گردد:

$$U^h(X)=\sum_{I}^{n}\sum_{j}^{m}P_j(X)(A^{-1}(X)B(X))_{jI}U_I \quad (۱۲)$$

$$U^h(X)=\sum_{I}^{n}\phi_I(X)U_I \quad (۱۳)$$

که در آن $U^h(X)$ تقریب تابع $\phi_I(X)$، تابع شـکل و U_I پـارامتر گرهی می‌باشد. به عبارتی دیگر تابع شکل به‌صورت رابطـه ۱۴ بیـان می‌گردد:

$$\phi_I(X)=\sum_{j}^{m}p_j(X)\left(A^{-1}(X)B(X)\right)_{jI}=P^TA^{-1}B_I \quad (۱۴)$$

مشتق جزیی تابع شکل به صورت رابطه ۱۵ بیان می‌شود:

$$\phi_{I,x}(X)=\sum_{j}^{m}\Big\{p_{j,x}(X)\left(A^{-1}(X)B(X)\right)_{jI} +p_j(X)\left(A^{-1}(X)_{,x}B(X)+A^{-1}(X)B(X)_{,x}\right)_{jI}\Big\} \quad (۱۵)$$

در این پژوهش تعداد توابع پایه بکار رفته در بـردار $P(X)$، شـش (m=6) و از مرتبه دو (p=2) می‌باشد. هم‌چنین تعداد گره‌های موجود در دامنه حمایتی (n) به نحوه توزیع گره‌ها و تعداد توابع پایه بسـتگی دارد و باید شرط وجود معکوس مـاتریس $A(X)$ در رابطـه ۸ را ارضـا نماید. به همین دلیل باید تعداد این گره‌ها از تعداد توابـع پایـه خیلـی بیش‌تر باشد ($n \gg m$). باید توجه داشت نظریه‌ای برای تعیین دقیق n وجود ندارد و باید از طریق آزمون‌های عددی بدست آید (Liu and Gu., 2005).

تابع وزن

تابع وزن که نقش مهمی در عمل تقریب‌سـازی تـابع شـکل دارد دارای چهار ویژگی زیر است (Liu., 2002).

مقدار تابع وزن در داخل دامنه حمایتی مثبت است.

مقدار تابع وزن در خارج دامنه حمایتی صفر است.

مقدار تابع وزن به صورت یکنواخـت نسـبت بـه نقطـه دل‌خـواه، کاهش می‌یابد.

این تابع به میزان مناسبی روی مرزها نرم عمل می‌کند.

تابع وزن به صورت‌های گوناگونی از جمله تابع گوسی و اسپیلاین وجود دارد که در این پژوهش از تابع اسپیلاین به‌عنوان تـابع وزن بـه صورت رابطه ۱۶ استفاده شده است:

$$W_i(X)=\begin{cases}\frac{2}{3}-4\overline{r_i^2}+4\overline{r_i^3}\overline{r_i}\le 0.5\\ \frac{4}{3}-4\overline{r_i}+4\overline{r_i^2}-\frac{4}{3}\overline{r_i^3} & 0.5<\overline{r_i}\le 1\\ 0 & \overline{r_i}>1\end{cases} \quad (۱۶)$$

$$\overline{r_i}=\frac{d_i}{r_w}=\frac{|x-x_i|}{r_w} \quad (۱۷)$$

در رابطه ۱۷ r_w شعاع تاثیر نقطه گرهی x_i مـی‌باشـد. بـرای هـر نقطه، r_w باید به گونه‌ای تعیین شـود کـه تعـداد وزن‌هـای غیرصـفر، بزرگ‌تر از تعـداد تـک تـک جمـلات موجـود در چندجملـه‌ای باشـند $(n>m)$.

روش عددی بدون شبکه محلی پترووو - گالرکین

این روش برای اولین بار توسط آتلـوری و ژو ارایـه شـد (Atluri and Zhu., 2000). این روش در هیچ از یک مراحل تحلیـل اعـم از تقریب متغیر میدان و انتگرال‌گیری عددی معادلات نیاز به شبکه‌بندی دامنه مسئله ندارد. این روش با استفاده از فرم ضعیف محلی معـادلات را حل می‌کند. تابع تقریب به کار رفته در ایـن روش حـداقل مربعـات متحرک است و به منظور حل معـادلات انتگرالـی از روش انتگـرال-گیری گوسی[۲] استفاده شد.

فرمول‌بندی روش بدون شبکه محلی پترووو - گالرکین:

برای یک مساله مکانیک جامدات دوبعدی با دامنه Ω محدود بـه مرز Γ معادله تعادل و شرایط مـرزی بـه‌صـورت روابـط ۱۸، ۱۹ و ۲۰ نوشته می‌شود.

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \quad \text{معادله تعادل} \quad (۱۸)$$

1- Weight function

2- Gaussian integration

$$u = \bar{u}$$ Γ_u روی شرط مرزی اساسی (۱۹)

$$\sigma.n = \bar{t}$$ Γ_t روی شرط مرزی طبیعی (۲۰)

با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترووو - گالرکین شکل ضعیف معادله ۱۸ روی دامنه محلی (دامنه تربیع)[1] حول گره Iام به صورت رابطه ۲۱ نوشته می‌شود.

$$\int_{\Omega_q} (\sigma_{ij,j} + b_i) W_I d\Omega = 0 \tag{۲۱}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز و قضیه دیورژانس رابطه ۲۱ را می‌توان به فرم رابطه ۲۲ ساده کرد.

$$\int_{\Omega_q} W_I \sigma_{ij,j}\, d\Omega = \int_{\Gamma_q} W_I \sigma_{ij}\, n_j d\Gamma - \int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij}\, d\Omega \tag{۲۲}$$

همچنین رابطه میان تنش و کشش روی مرز به صورت رابطه ۲۳ است.

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \tag{۲۳}$$

با جای‌گذاری معادله ۲۲ و ۲۳ در معادله ۲۱ رابطه ۲۴ حاصل می‌شود.

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij}\, d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I t_i\, d\Gamma - \int_{\Gamma_{q_i}} W_I t_i\, d\Gamma = \int_{\Gamma_{qt}} \bar{t_i} W_I\, d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I b_i\, d\Omega \tag{۲۴}$$

در رابطه ۲۴ Γ_{q_i}، Γ_{q_t} و Γ_{q_u} به ترتیب معرف مرز داخلی دامنه تربیع، مرز طبیعی و مرز اساسی هستند. از آن‌جایی که در این روش تابع وزن به نحوی انتخاب می‌شود که مقدار آن روی مرز داخلی دامنه تربیع صفر باشد، پس مقدار جمله سوم سمت چپ رابطه ۲۴ صفر است. در نهایت معادلات خطی گسسته‌سازی شده برای گره Iام در فرم ماتریسی به صورت رابطه ۲۵ است.

$$K_I u = F_I \tag{۲۵}$$

$$K_I = \int_{\Omega_q} V_I^T D B d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I^T n D B d\Gamma \tag{۲۶}$$

$$F_I = \int_{\Omega_q} W_I^T b d\Omega + \int_{\Gamma_{qt}} W_I^T t d\Gamma \tag{۲۷}$$

در روابط ۲۵ و ۲۶، W ماتریس وزن کلی و V مشتق آن است.

$$W_I = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & \cdots & W_n & 0 \\ 0 & W1 & \cdots & 0 & Wn \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

$$V_I = \begin{bmatrix} W_{1,x} & 0 & & W_{n,x} & 0 \\ 0 & W_{1,y} & \cdots & 0 & W_{n,y} \\ W_{1,y} & W_{1,x} & & W_{n,y} & W_{n,x} \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x} & 0 & & \frac{\partial \emptyset_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \emptyset_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial \emptyset_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \emptyset_1}{\partial y} & \frac{\partial \emptyset_1}{\partial y} & & \frac{\partial \emptyset_n}{\partial y} & \frac{\partial \emptyset_n}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

گسسته‌سازی معادلات آب‌های کم‌عمق با روش بدون شبکه محلی پترووو - گالرکین

معادله آب‌های کم‌عمق یک معادله دیفرانسیل هذلولی است که با انتگرال‌گیری از معادلات سه‌بعدی ناویر استوکس و با فرض‌های جریان تراکم‌ناپذیر با توزیع فشار هیدرواستاتیک و توزیع یکنواخت سرعت در عمق بدست می‌آید. که عبارت است از (رابطه ۳۱).

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\partial (hu^2 + g\, h^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (huv)}{\partial y} - gh(s_{0x} - s_{fx}) = 0 \\ \frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial (hv^2 + g\, h^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (huv)}{\partial y} - gh(s_{0y} - s_{fy}) = 0 \end{cases} \tag{۳۱}$$

در رابطه ۳۱، h عمق جریان، u و v سرعت متوسط عمقی به ترتیب در راستای x و y، g شتاب ثقل، s_{0x} شیب بستر، s_{fx} شیب خط انرژی است. در عمل، معمولا، شیب خط انرژی براساس ضریب زبری مانینگ به‌صورت روابط ۳۲ و ۳۳ به‌دست می‌آید.

$$s_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \tag{۳۲}$$

$$s_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \tag{۳۳}$$

که در آن n ضریب مانینگ می‌باشد. با صرف‌نظر از شیب خط انرژی معادلات آب‌های کم‌عمق به فرم ماتریسی رابطه ۳۴ بدست می‌آید:

$$U_t + AU_{,x} + BU_{,y} = SU \tag{۳۴}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{bmatrix} \tag{۳۶}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ gs_{0x} & 0 & 0 \\ gs_{0y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

معادله ۳۴ با استفاه از روش ضمنی به‌صورت رابطه ۳۸ گسسته-سازی می‌شود.

1- Quadrature domain

$$\frac{U_{n+1}-U_n}{\Delta t}+AU_{,x}^{n+1}+BU_{,y}^{n+1}=SU^{n+1} \quad (۳۸)$$

که در رابطه ۳۸ $\Delta t=t^{n+1}-t^n$ است.

معادله ۳۸ پس از بازنویسی به فرم رابطه ۳۹ تبدیل می‌شود.

$$(I-S\Delta t)U^{n+1}+A\Delta tU_{,x}^{n+1}+BU_{,y}^{n+1}=U^n \quad (۳۹)$$

که I نمایانگر ماتریس واحد می‌باشد.

شرط مرزی دریشله (روی Γ_1) به‌صورت رابطه ۴۰ است.

$$U^{n+1}-\bar{U}=0 \quad (۴۰)$$

در صورت وزن دار کردن رابطه ۳۹ و انتگرال‌گیری بر روی دامنه Ω معادله آب‌های کم‌عمق به فرم ماتریسی رابطه ۴۱ در می‌آید.

$$KU^{n+1}=FU^n \quad (۴۱)$$

$$K=\int_\Omega Iw_i\phi_i d\Omega-\int_\Omega S\Delta tw_i\phi_i d\Omega+\int_\Omega A\Delta tw_i\phi_{i,x}d \quad (۴۲)$$
$$+\int_\Omega B\Delta tw_i\phi_{i,y}d\Omega+\alpha\int_{\Gamma_1}w_i\phi_i d\Gamma$$

$$F=\int_\Omega w_i\phi_i d\Omega+\alpha\int_{\Gamma_1}w_i\bar{U}d\Gamma \quad (۴۳)$$

با توجه به این‌که تابع شکل حداقل مربعات متحرک شرایط تـابع دلتای کرونکر را ارضا نمی‌کند به همین دلیل به منظور اعمـال شـرط مرزی دریشله از روش جریمه‌هاستفاده شده است، که α نیـز ضـریب جریمه می‌باشد.

حل معادله جابجایی در میدان سرعت متغیر

معادله جابجایی در میدان سرعت متغیـر یـک معادلـه دیفرانسـیل هذلولی است که جابه‌جایی یک کمیـت اسـکالر را در میـدان سـرعت نشان می‌دهد که معادله آن به صورت معادله۴۴ می‌باشد:

$$yu_{,x}-xu_{,y}=0 \quad (۴۴)$$

در معادله ۴۴، A=y ، B=-x ، S=0 و U=u می‌باشد.

حوزه فیزیکی معادله به صورت رابطه ۴۵ است.

$$\Omega(x,y)=\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases} \quad (۴۵)$$

شرایط مرزی مسئله به شرح زیر است (رابطه ۴۶).

$$\begin{aligned}&u(-1,y)=0 && 0\le y\le 1\\ &u(x,1)=0 && 0\le x\le 1\\ &u(x,0)=0 && -0.35\le x\le 0\\ &u(x,0)=0 && -0.1\le x\le -0.65\\ &u(x,0)=1 && -0.65\le x\le -0.35\end{aligned} \quad (۴۶)$$

جواب دقیق این مسئله بصورت رابطه ۴۷ است.

$$\begin{cases}u(x,y)=1 & 0.35\le (x^2+y^2)^{0.5}\le 0.65\\ u(x,y)=0 & otherwise\end{cases} \quad (۴۷)$$

شکل ۱ نقاط و مرزها را برای حوزه فیزیکی با ۸۶۱ نقطـه نشـان می‌دهد در این شکل Δx = Δy = 0.05m فرض شده است. هم‌چنین مقدار ضریب جریمه بـرای اعمـال شـرایط مـرزی $\alpha=10^6$ در نظـر گرفته شد.اشکال ۲ و ۳ نیز حل دقیق معادله و حل آن با روش بـدون شبکه پتروف گالرکین را نشان می‌دهد. نمودار ۳ جابجایی یک کمیت اسکالر را در میدان سرعت $\{y,-x\}$ نشان می‌دهد. همـان‌طـور کـه اشاره شد میدان سرعت در بازه $-1\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ متغیـر می‌باشد. در حل دقیق مقدار این کمیت در نقاط واقع بـر روی نمـودار برابر یک و در سایر نقاط صفر اسـت. ایـن موضـوع در شـکل ۳ کـه مربوط به حل عددی روش پتروف گالرکین است نیـز بـا دقـت نسـبتا خوبی نشان داده شده است.

معیارهای خطاسنجی

در این قسمت از معادلات زیر به عنوان معیارهـای خطاسـنجی و تعیین کارآیی مدل ستفاده شد. میانگین خطا، میانگین خطای مطلق و جذر میانگین مربعات خطا. واحد معیارها بر اسـاس واحـد مقـادیر وارد شده درآن‌هاست. روابط ۴۸، ۴۹ و ۵۰ نحوه محاسـبه ایـن معیارهـا را نشان می‌دهند.

$$ME=\frac{\sum_{i=1}^n(u_0-u_s)}{n} \quad (۴۸)$$

$$MAE=\frac{\sum_{i=1}^n|u_0-u_s|}{n} \quad (۴۹)$$

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n(u_0-u_s)^2}{n}} \quad (۵۰)$$

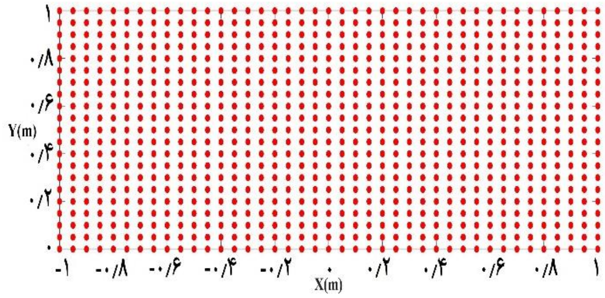
که در آن u_0 و u_s به ترتیب مقدار محاسبه شده از حل دقیـق و مقدار عددی محاسبه شده توسط مدل برای هر نقطه است. جـدول ۱ مقادیر خطاهای محاسبه شده برای این مسئله را نشـان مـی‌دهـد. بـا توجه به مقادیر خطاهای محاسبه شده در جدول ۱ مشخص شد مـدل از دقت و کارایی مناسـبی بـرای حـل معـادلات دیفرانسـیل هـذلولی برخوردار است.

مدل‌سازی عبور جریان آب از روی سرریز سد سیاه‌بیشه

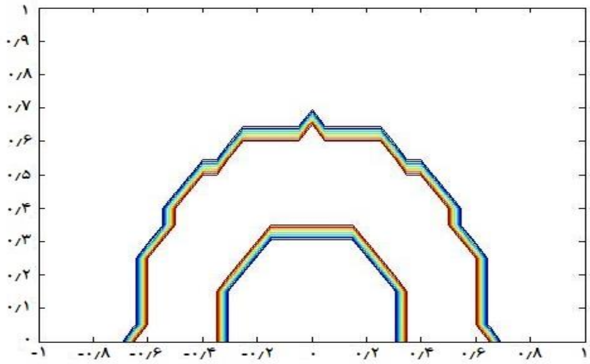
سرریز سد سیاه بیشه یک سـرریز اوجـی اسـت. پـلان منطقـه و هندسه سرریز در شکل‌های ۲ و ۳ نشـان داده شـده اسـت همچنـین جدول ۲ شامل مقادیر سـرعت و ارتفـاع انـدازه‌گیـری شـده در نقـاط مختلف جریان آب می‌باشد (RahmaniFiroozjaee and Afshar., 2011). هدف اندازه‌گیری سـرعت و تـراز سـطح آب در طـول مسـیر است.

جدول ۱- محاسبه خطای میانگین، میانگین مطلق و جذر میانگین مربعات

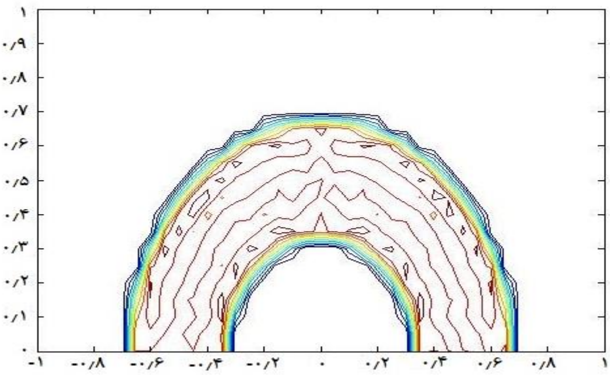
میانگین خطا (متر)	-۰/۰۳۲۶-
میانگین خطای مطلق (متر)	۰/۰۶۵۵
جذر میانگین مربعات خطا(متر)	۰/۱۵۶۲۷



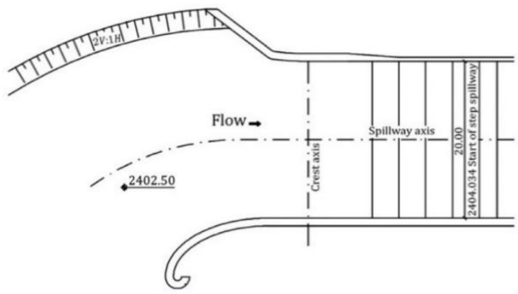
شکل ۱- دامنه محاسباتی مسئله جابجایی در میدان سرعت متغیر



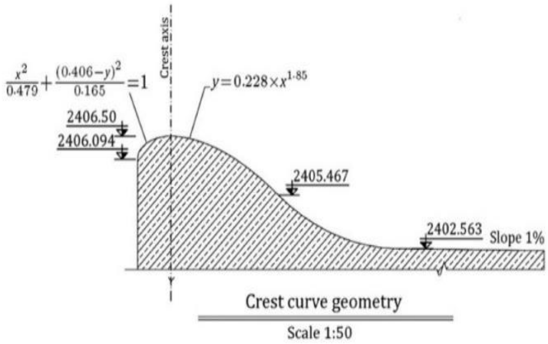
شکل۲- حل دقیق مسئله جابجایی در میدان سرعت متغیر



شکل۳- حل عددی مسئله جابجایی در میدان سرعت متغیر



شکل ٤- پلان سرریز سد سیاه بیشه (RahmaniFiroozjaee and Afshar., 2011)



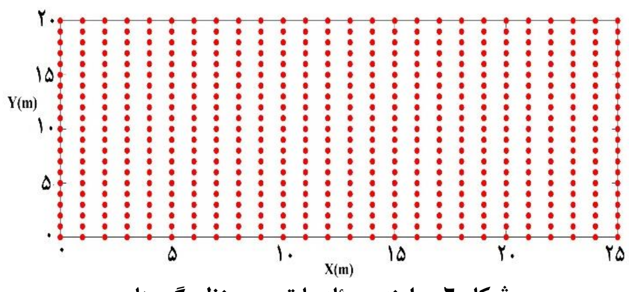
شکل ۵- هندسه سرریز سد سیاه بیشه(RahmaniFiroozjaee and Afshar., 2011)

جدول۲- عمق آب و سرعت اندازه‌گیری شده در طول مسیر

دبی	مقطع	مشخصات		اندازه‌گیری‌ها	عمق از سطح آب	محل		
		ارتفاع	فاصله			دست راست	مرکز	دست چپ
۹۲	A	۲۴۰۲/۵	۰	عمق آب		۵/۷۱	۵/۷	۵/۷
				سرعت	۰/۲	۰/۸۶	۰/۶۳	۰/۴۵
					۰/۸	۰/۸۷	۰/۶۳	۰/۳۳
۹۲	B	۲۴۰۲/۵	۷/۵	عمق آب		۵/۶۴	۵/۶۵	۵/۶۴
				سرعت	۰/۲	۰/۹۶	۰/۸۱	۰/۷۸
					۰/۸	۰/۷۱	۰/۵۹	۰/۶۳
۹۲	C	۲۴۰۶/۵	۱۵	عمق آب		۱/۲۸	۱/۲	۱/۲۵
				سرعت	۰/۶	۴/۸۲	۴/۸۵	۴/۸۲
۹۲	D	۲۴۰۴/۴۹	۲۵	عمق آب		۰/۷۲	۰/۶	۰/۶۸
				سرعت	۰/۶	۷/۶۱	۷/۷۷	۷/۵۸

حل مسئله با توزیع گره‌ای منظم

در این حالت دامنه مسئله یک مستطیل به ابعاد ۲۰ × ۲۵ با توزیع منظم گره‌ها مطابق شکل ۶ در نظر گرفته شد. به طوری کـه فاصـله گره‌ها در راستای x و y برابر یـک متـر ($\Delta x = \Delta y = 1m$)و تعـداد گره‌ها برابر ۵۴۶ است.همچنین $\Delta t = 5\ s$ در نظر گرفته شد. ضریب جریمه $\alpha = 10^6$ می‌باشد.



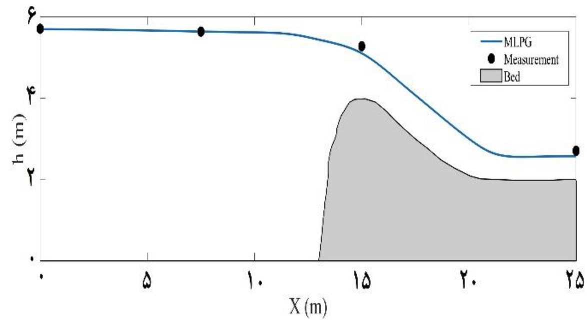
شکل ٦- دامنه مسئله با توزیع منظم گره‌ها

شکل‌های ۷ تا ۱۲ شامل نمودارهای سرعت و تراز سـطح آب بـا روش بدون شبکه پترو - گالرکین در حالـت توزیـع مـنظم گـره‌ای و مقایسه آن‌ها با مقادیر داده شده در جدول ۲ اسـت. جـدول ۳ شـامل مقادیر بدست آمـده از مـدل در هـر مقطـع و مقایسـه آن بـا مقـادیر اندازه‌گیری شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفـت در حالـت دامنـه مستطیلی با توزیع منظم گره‌ای مقادیر سـرعت و ارتفـاع در هـر سـه

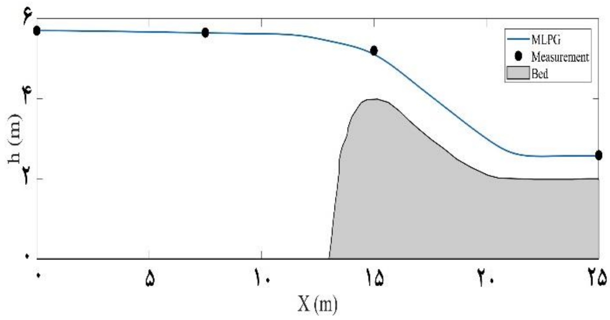
مقطع $y=0$ و $y=10\,m$ و $y=20\,m$ تقریبا با هم برابر شد. جواب‌ها در مقطع میانی یعنی $y=10\,m$ به مقادیر اندازه‌گیری شده نزدیک‌تر است.

جدول۳- مقادیر بدست آمده از مدل در مقاطع مختلف در توزیع منظم گره‌ای

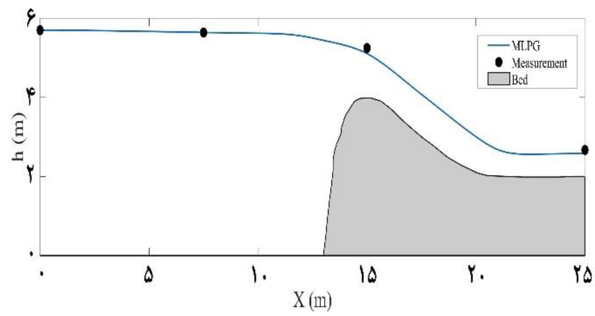
مقطع	فاصله (متر)		دست راست MLPG	دست راست Measurement	مرکز MLPG	مرکز Measurement	دست چپ MLPG	دست چپ Measurement
A	۰	تراز سطح آب (m)	۵/۷	۵/۷۱	۵/۷	۵/۷	۵/۷	۵/۷
		سرعت (m/s)	۰/۶۳	۰/۸۶۵	۰/۶۳	۰/۶۳	۰/۶۳	۰/۳۹
B	۷/۵	تراز سطح آب (m)	۵/۶۴	۵/۶۴	۵/۶۴۲	۵/۶۵	۵/۶۴۲	۵/۶۴
		سرعت (m/s)	۰/۸۴	۰/۸۳۵	۰/۸۴۲	۰/۷	۰/۸۴۱	۰/۷۰۵
C	۱۵	تراز سطح آب (m)	۵/۱۵۳	۵/۲۸	۵/۱۵۳	۵/۲	۵/۱۵۳	۵/۲۵
		سرعت (m/s)	۲/۳۴۳۳	۴/۸۲	۲/۳۴۷	۴/۸۵	۲/۳۴	۴/۸۲
D	۲۵	تراز سطح آب (m)	۲/۵۷۵	۲/۷۱	۲/۵۷۵	۲/۵۹	۲/۵۷۶	۲/۶۷
		سرعت (m/s)	۷/۸۳۵	۷/۶۱	۷/۸۳	۷/۷۷	۷/۸۸۸	۷/۵۷



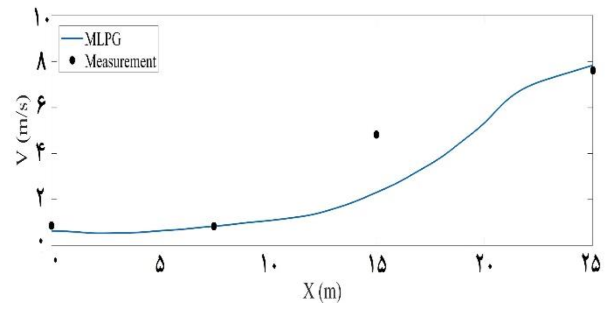
شکل ۷- نمودار تراز سطح آب در مقطع y=0 m در توزیع منظم گره‌ای



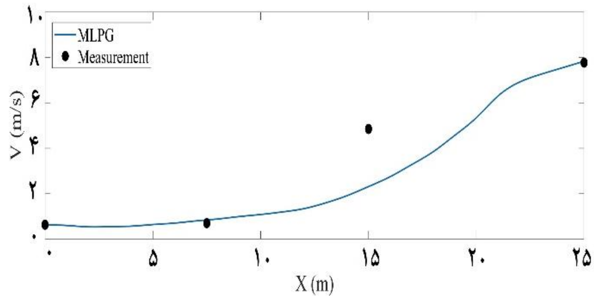
شکل ۸- نمودار تراز سطح آب در مقطع y=10 m در توزیع منظم گره‌ای



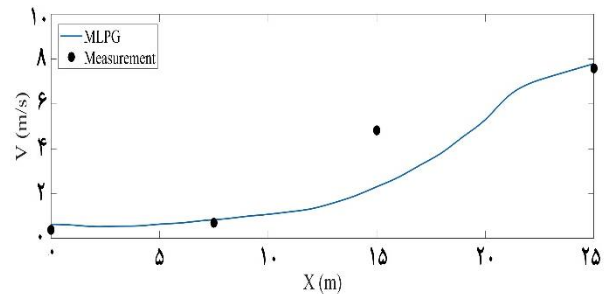
شکل ۹- نمودار تراز سطح آب در مقطع y=20 mدر توزیع منظم گره‌ای



شکل ۱۰- نمودار سرعت آب در مقطع y=0 m در توزیع منظم گره‌ای



شکل ۱۱- نمودار سرعت آب در مقطع y=10 m در توزیع منظم گره‌ای



شکل ۱۲- نمودار سرعت آب در مقطع y=20 m در توزیع منظم گره‌ای

نتایج توزیع گره‌ای منظم

تعیین مقادیر شاخص‌های خطاسنجی

در این بخش مقادیر میانگین خطا، میانگین خطای مطلق و جذر میانگین مربعات خطابا استفاده از روابط۴۸، ۴۹ و ۵۰ محاسبه گردید. جدول ۳ شامل این مقادیر می‌باشد. همان‌طور که در جدول ۴ مشخص است خطا در دو حالت، با احتساب مقطع واقع در نقطه سرریز و بدون احتساب آن محاسبه شده است. مقادیر خطا بدون در نظر گرفتن نقطه سرریز کاهش قابل توجهی یافته است و این بدین دلیل است که در پای سرریز توزیع واقعی فشار هیدرودینامیک است حال آن‌که در معادلات آب‌های کم‌عمق فرض توزیع فشار هیدرواستاتیک است و این مسئله عامل ایجاد خطا روی تاج سرریز به‌خصوص در مورد مقادیر سرعت است.

جدول٤- محاسبه خطا در توزیع منظم گره‌ای

	با لحاظ نقطه سرریز		بدون لحاظ نقطه سرریز	
	تراز سطح آب	سرعت	تراز سطح آب	سرعت
میانگین خطا (متر)	۰/۰۴۴۳	۰/۵۴۸۲	۰/۲۸۸	-۰/۰۹۸
میانگین خطای مطلق (متر)	۰/۰۴۴۶	۰/۷۳۴۲	۰/۰۲۹۳	۰/۱۵۰۱
میانگین جذر مربعات خطا (متر)	۰/۰۱۹۶	۰/۳۶۱۸	۰/۰۱۸۴	۰/۰۶۰۹

حل مسئله با توزیع گره‌ای نامنظم

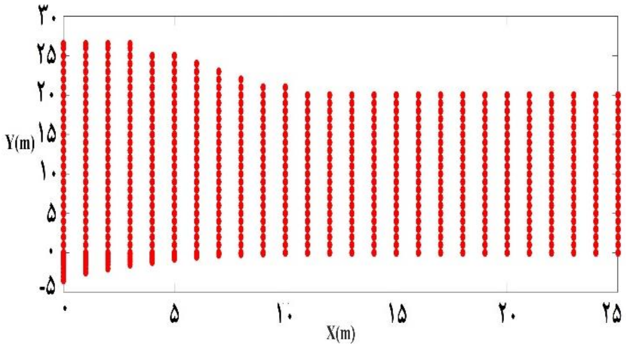
دامنه مسئله در این حالت به صورت شکل ۱۳ با توزیع گره‌ای نامنظم (با فواصل گره‌ای متفاوت) می‌باشد. تعداد گره‌ها برابر ۶۵۷ است.

همچنین $\Delta t = 4\ s$ در نظر گرفته شد. اشکال ۱۴ تا ۱۹ شامل نمودارهای سرعت و تراز سطح آب با روش بدون شبکه پترووو-گالرکین در حالت توزیع نامنظم گره‌ای و مقایسه آن‌ها با مقادیر داده شده در جدول ۲ می‌باشد. جدول۵ شامل مقادیر بدست آمده از مدل در هر مقطع در حالت توزیع نامنظم گره‌ای و مقایسه آن با مقادیر اندازه‌گیری شده است.همان‌طور که در شکل‌های ۱۴ تا ۱۹ نمایش داده شد در این حالت مقادیر سرعت و تراز سطح آب در هر مقطع با هم متفاوت است. مجددا لازم به یادآوری است در معادلات آب‌های کم‌عمق توزیع فشار هیدرواستاتیک فرض می‌شود. حال آن‌که در قسمت سرریز توزیع واقعی فشار هیدرودینامیک است و این مسئله موجب ایجاد خطا در محل سرریز می‌شود. ولی همان‌طور که از نمودارهای فوق مشخص است در سایر نقاط مدل از دقت مناسبی برخوردار است. همچنین لازم به ذکر است در این پژوهش از اصطکاک انرژی صرف‌نظر شده است. که این امر مقداری خطا در محاسبات ایجاد می‌کند ولی به طور کلی مدل از توانایی مناسبی برای حل مسئله عبور آب از روی سرریز برخوردار است.

نتایج توزیع گره‌ای نامنظم

تعیین مقادیر شاخص‌های خطاسنجی

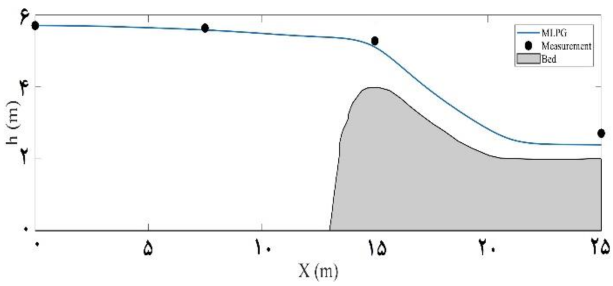
در این بخش مجددا مقادیر میانگین خطا، میانگین خطای مطلق و جذر میانگین مربعات خطا با استفاده از روابط ۴۸، ۴۹ و ۵۰ در دوحالت، با لحاظ مقطع واقع بر سرریز و بدون لحاظ آن محاسبه شد. جدول ۶ شامل مقادیر خطا می‌باشد، و مجددا شاهدکاهش خطا در حالت دوم هستیم.



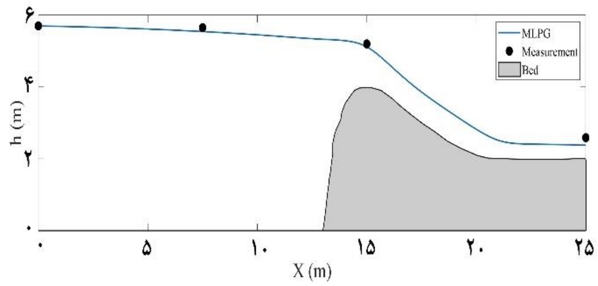
شکل ۱۳- دامنه مسئله با توزیع نامنظم گره‌ای

جدول۵- مقادیر بدست آمده از مدل در مقاطع مختلف در توزیع نامنظم گره‌ای

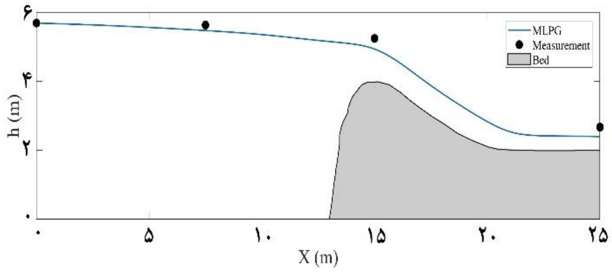
مقطع	فاصله (متر)		دست راست (متر)		مرکز (متر)		دست چپ (متر)	
			MLPG	Measurement	MLPG	Measurement	MLPG	Measurement
A	۰	تراز سطح آب (m)	۵/۷۱	۵/۷۱	۵/۷	۵/۷	۵/۷	۵/۷
		سرعت (m/s)	۰/۸۶۵	۰/۸۶۵	۰/۶۳	۰/۶۳	۰/۶۳	۰/۳۹
B	۷/۵	تراز سطح آب (m)	۵/۵۸۶	۵/۶۴	۵/۵۴۲	۵/۶۵	۵/۵۳۸	۵/۶۴
		سرعت (m/s)	۱/۰۸۴۲	۰/۸۳۵	۱/۵۴۸	۰/۷	۱/۴۹۶	۰/۷۰۵
C	۱۵	تراز سطح آب (m)	۵/۲۵۲	۵/۲۸	۵/۲۰۲۷	۵/۲	۵/۱۱	۵/۲۵
		سرعت (m/s)	۲/۲۶۵۳	۴/۸۲	۳/۴۰۳۲	۴/۸۵	۴/۷۱۸۵	۴/۸۲
D	۲۵	تراز سطح آب (m)	۲/۳۸۸	۲/۷۱	۲/۳۸	۲/۵۹	۲/۴	۲/۶۷
		سرعت (m/s)	۷/۶۰۶۷	۷/۶۱	۷/۷۶۸	۷/۷۷	۷/۵۲۲	۷/۵۷



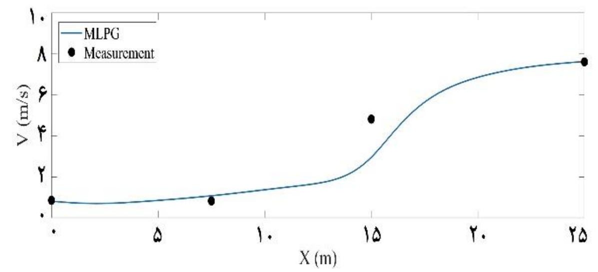
شکل ۱٤- نمودار تراز سطح آب در مقطع y=0 m در توزیع نامنظم گره-ای



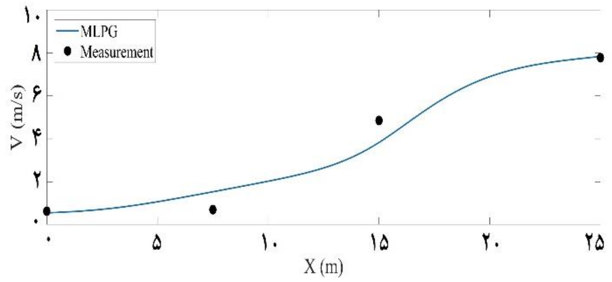
شکل ۱۵- نمودار تراز سطح آب در مقطع y=10 m در توزیع نامنظم گره‌ای



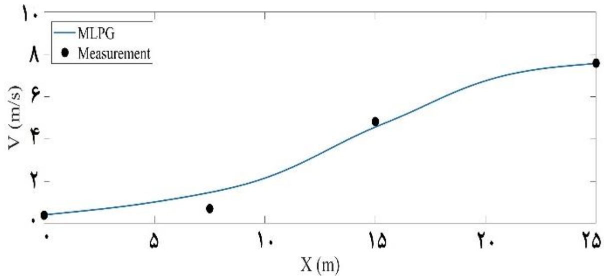
شکل ١٦- نمودار تراز سطح آب در مقطع y=20 m در توزیع نامنظم گره‌ای



شکل ۱۷- نمودار سرعت آب در مقطع y=0 m در توزیع نامنظم گره‌ای



شکل ۱۸- نمودار سرعت آب در مقطع y=10 m در توزیع نامنظم گره‌ای



شکل ۱۹- نمودار سرعت آب در مقطع y=20 m در توزیع نامنظم گره‌ای

جدول٦- محاسبه خطا در توزیع نامنظم گره‌ای

	با لحاظ نقطه سرریز		بدون لحاظ نقطه سرریز	
	تراز سطح آب	سرعت	تراز سطح آب	سرعت
میانگین خطا (متر)	۰/۱۰۳۴۴	-۰/۱۶۹۰۱	۰/۰۸۹۶	۰/۱۷۳
میانگینخطای مطلق (متر)	۰/۱۰۳۸۹	۰/۵۲۳۷	۰/۰۸۹۶	۰/۱۸۱۸
میانگین جذر مربعات خطا (متر)	۰/۰۴۳۰۸	۰/۲۶۴۸	۰/۰۴۱۱۴	۰/۱۰۱

نتیجه‌گیری

به دلیل اهمیت معادلات آب‌های کم‌عمق در مهندسی آب، مدل‌سازی عددی این معادلات امری ضروری است. در این پژوهش معادلات آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش بدون شبکه پتروو‌گالرکین به همراه تابع شکل حداقل مربعات متحرک و تابع وزن اسپیلاین در نرم‌افزار متلب مدل شد. این روش علاوه بر حذف مشکلات مرتبط با شبکه‌بندی دامنه مسئله، از توانایی خوبی برای حل مسائلی با هندسه نامنظم برخوردار است.

در این تحقیق پس از مدل‌سازی معادلات آب‌های کم‌عمق ابتدا به حل مثال جابجایی در میدان سرعت متغیر پرداخته شد و دقت مدل با محاسبه معیارهای خطاسنجی مورد بررسی قرار گرفت که میزان میانگین خطا، میانگین خطای مطلق و میانگین خطای جذر مربعات به ترتیب برابر ۰/۰۳۲۶-، ۰/۰۶۵۵ و ۰/۱۵۶۲۷ متر بود.که این امر نشان از دقت و کارایی مدل است. سپس مسئله عبور آب از روی سرریز سد سیاه‌بیشه با استفاده از مدل در دو حالت با توزیع گره‌ای منظم و توزیع گره‌ای نامنظم حل شد. در حالت منظم نمودار سرعت و تراز سطح آب در مقاطع عرضی مختلف مشابه بود ولی در حالت نامنظم نمودار سرعت و تراز سطح آب به یک شکل نبود، و مقادیر بدست آمده از مدل در مقاطع عرضی مختلف متفاوت بود. سپس نتایج بدست آمده از مدل با مقادیریکه به صورت عملی اندازه‌گیری شده بود مقایسه شد. در نهایت نیز خطای محاسباتی مسئله محاسبه گردید و مشخص شد بجز نقطه سرریز که به دلیل فرض فشار هیدرواستاتیک در معادلات آب‌های کم‌عمق مقداری خطا ایجاد می‌شود در سایر نقاط مدل از دقت بسیارخوبی برخوردار است.

منابع

ارزانی،ح. ۱۳۸۵. حل معادلات آب‌های کم‌عمق به روش بدون شبکه. رساله دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت، تهران

رحمانی فیروزجائی،ع.، فرویزی،ف. ۱۳۹۲. حل عددی معادلات آب-های کم‌عمق با استفاده از روش بدون شبکه گالرکین. هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت. زاهدان

محتشمی،ع.، اکبرپور،ا.، ملازاده،م. ۱۳۹۶. مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پتروو – گالرکین. مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت ۹۶. ۱۷. ۲: ۳۹۳-۴۰۳

Atluri,S.N and Zhu,T.L. 2000. The meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics, Computational mechanics. 25: 169-179.

Belytschko,T., Lu,Y.Y., Gu,L. 1994. Elements free galerkin methods, International journal for numerical methods in engineering. 30. 2: 229-256.

Darbani,M., Ouahsine,A., Villon,P., Naceur,H., Smaoui,H. 2011. Meshless method for shallow water equations with free surface flow. Applied mathematics and computation.217: 5113-5124.

Gingold,R.A and Monaghan,J.J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics:Theory and applications to non-spherical stars, Monthly notices of the royal astronomical Society. 181: 375–389.

Liu,G. 2002. Mesh free methods: Moving beyond the finite element method, Boca raton: CRC press.

Liu,G., Gu,Y.T. 2005. An introduction to meshfree methods and their programming, Published by springer, P.O.BOX17, 3300 AA dordrecht, the netherland.

Nayroles,N., Touzot,G., Villon,P.1992. generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, computaional mechanics.10. 5: 307-318.

RahmaniFiroozjaee,A and Afshar,M.H. 2011. Discrete least squares meshless (DLSM) method for simulation of steady state shallow water flows, scientiaIranica. 18: 835-845.

Rodriguez-Paz,M., Bonet,J. 2005. A corrected smooth particle hydrodynamics formulation of the shallow-water equations. *Computers and structures*. 83. 1396-1410.

Zhou,X., Hon,Y.C and Cheung,K.F. 2004. A grid-free, Nonlinear shallow-water model with moving boundary. *Journal of engineering analysis with boundary elements*. 28: 967-973.

Zounemat-Kermani,M and Ghiasi-Tarzi,O. 2016. Using natural element mesh-free numerical method in solving shallow water equations, European journal of environmental and civil engineering. 21: 753-767.

Iranian Journal of Irrigation and Drainage
No. 3, Vol. 12, Agu.-Sep. 2018, p. 512-524

نشریه آبیاری و زهکشی ایران
شماره۳، جلد ۱۲، مرداد - شهریور ۱۳۹۷، ص. ۵۲۴-۵۱۲

Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Simulation of Transient State Shallow Water Flows

S.Deymevar[1] , A.Akbarpour[2*] and M.Mollazadeh[3]
Recived: Nov.24, 2017 Accepted: Dec.07, 2017

Abstract

The importance of shallow water flow in water engineering has led to the governing equations to be studied in various methods. Numerical techniques like finite element are one of these methods. These methods solve differential equations in simple and complex geometric cases by meshing on the computing domain. Recently, Mesh less methods that need no meshing or re-meshing on the domain are being used to solve differential equations in both simple and complex geometric cases. In this research, shallow water equations were modeled using Mesh less local Petrov- Galerk in with moving least squares approximation function. Then, the convergent in the variable velocity field problem was solved and the model error rate was calculated. it was indicated that the model has a good accuracy, so that the mean error and root mean square error were -0.0326 and 0.15627 respectively..Then, the water flow was calculated from the overflow of Siah Bishe dam and the results of the model were compared with the measured values. Which confirms the accuracy of solving the equations of shallow water using the Petrov- Galerkin method.

Keywords: Meshless local Petrov-Galerkin, Moving Least Squares shape function, Shallow water

1- M.Sc. Student, Water Resources Engineering, University of Birjand
2- Associate Professor of Civil Engineering, University of Birjand
3- Assistant Professor of Civil Engineering, University of Birjand
(*-Corresponding Author Email:Akbarpour@Birjand.ac.ir)