

## ارزیابی پیش‌بینی دو مدل هدایت هیدرولیکی غیراشباع با در نظرگیری عدم قطعیت پارامترها

آرش مدرسی راد<sup>۱</sup>، بیژن قهرمان<sup>۲\*</sup>، ابوالفضل مساعدی<sup>۳</sup>، مجتبی صادق<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۹/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۱۰

### چکیده

هدایت هیدرولیکی غیر اشباع در محیط متخلخل متناسب با مقدار حجمی آب است. به دست آوردن منحنی هدایت هیدرولیکی غیراشباع برای مدل‌سازی حرکت آب در خاک الزامی است. تئوری‌ها و مدل‌های متعددی به منظور برآورد هدایت هیدرولیکی غیر اشباع پیشنهاد شده است. اما روش‌های پیشنهاد شده، با وجود بهتر کردن برآورد مدل، نقطه ضعف‌هایی نیز دارند. تحلیل مسیر بحرانی از نظریه نفوذ، با ساده‌سازی مدل هندسه پیچیده محیط متخلخل، سعی در بهبود پیش‌بینی هدایت هیدرولیکی غیراشباع دارد. همچنین، مدل پیترز-دورنر-ایدن نشان داده است که قابلیت بالایی در پیش‌بینی هدایت هیدرولیکی غیر اشباع دارد. در این پژوهش، هر دو مدل تئوری نفوذ و مدل پیترز-دورنر-ایدن ارزیابی می‌شوند و همچنین با استفاده از روش مونت کارلو زنجیره مارکوف به بررسی عدم قطعیت موجود در پارامترهای شبیه‌سازی پرداخته می‌شود. در این تحقیق، از الگوریتم هیبرید تکاملی<sup>۵</sup> مونت کارلو - زنجیره مارکوف استفاده شده که شامل روش‌های متروپولیس تطبیق پذیر، تکامل - تفاضلی و به روز رسانی اسنوکر می‌باشد که بررسی فضای پارامتری را به حداقل تعداد تکرار می‌رساند. نتایج سنسجس خطا نشان داد که پیش‌بینی‌های هدایت هیدرولیکی مدل تئوری نفوذ دقیق‌تر می‌باشد و در تمامی موارد به جز یک خاک معیار نش - ساتکلیف بالاتر از ۰.۹ بود. همچنین، تعداد پارامترهای مورد نیاز مدل پیترز-دورنر-ایدن بیشتر از مدل تئوری نفوذ می‌باشد که منجر به افزایش عدم قطعیت پارامتریک می‌شود. اعمال چند قید، و ثابت فرض نمودن تعدادی از پارامترهای مورد نیاز مدل پیترز-دورنر-ایدن، سبب می‌شود که این روش در تمامی بافت‌های خاک جواب مناسبی نداشته باشد. مقایسه سرعت همگرایی این دو مدل نشان داد که پارامترهای مدل مدل پیترز-دورنر-ایدن در تمامی موارد تقریباً با ۳۰۰ تکرار به همگرایی می‌رسند و این در حالی است که مدل تئوری نفوذ تقریباً به ۲۰۰۰ تکرار برای رسیدن به همگرایی احتیاج دارد. نتایج، بیانگر این موضوع است که مدل تئوری نفوذ با تعداد پارامترهای مورد نیاز کمتر، قادر است تخمین‌های دقیق‌تر و مطمئن‌تری از هدایت هیدرولیکی غیر اشباع و نگهداشت آب داشته باشد.

**واژه‌های کلیدی:** تئوری نفوذ، جریان مویینه، محیط متخلخل، مدل پیترز-دورنر-ایدن، هدایت مویینیگی

### مقدمه

استفاده از مدل‌های عددی یا ریاضی برای استخراج تابع هدایت هیدرولیکی از داده‌های اندازه‌گیری شده منحنی رطوبتی می‌باشد (Zand-Parsa and Sepaskhah, 2004; Zand-Parsa, 2006; Alfaro Soto et al., 2017). از جمله رویکردهای سنتی در این زمینه، ایجاد فرمولاسیون از طریق مفهوم مجموعه‌ای از لوله‌های مویینه به منظور توصیف رابطه بین جریان و فشار تحت شرایط جریان آرام (قانون Hagen-Poiseuille) می‌باشد. شبیه‌سازی‌های کامپیوتری نیز به منظور توسعه مدل‌هایی که اعوجاج را مرتبط به تخلخل خاک می‌کند، به کار رفته است (Cihan et al., 2009). همچنین، اعوجاج ( $\tau$ ) به صورت تابعی توانی از شعاع حفرات ( $r$ ) تعریف شده است ( $\tau = r^b$ ) که توان  $b$  یک پارامتر تجربی می‌باشد که خود تابعی از بعد فرکتال منافذ است (Crawford, 1994). به طور مشابه، دیگر مدل‌های ریاضی که اعوجاج مسیر جریان را تابعی توانی از بعد فرکتال می‌دانستند نیز معرفی شدند (Ghanbarian et al.,

پیش‌بینی دقیق هدایت هیدرولیکی غیراشباع برای حل مسائل جریان سیالات و انتقال املاح درون محیط متخلخل ضروری است (زرین فر و همکاران، ۱۳۹۰). با این حال، دستگاه‌های ساخته شده برای اندازه‌گیری هدایت هیدرولیکی غیر اشباع گران‌بها بوده و کار با آن‌ها زمان‌بر و دشوار می‌باشد. از این‌رو، یک جایگزین مناسب،

۱- دانشجوی دکتری آبیاری و زهکشی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- استاد گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد

۳- استاد گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد

۴- استادیار گروه عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه ایالتی بویز، بویز، آیداهو، آمریکا

\*- نویسنده مسئول: (Email: bijangh@um.ac.ir)

حفظ گردد (Kitanidis and Bras, 1980). الگوریتم Hybrid-evolution مونت کارلو - زنجیره مارکوف (Sadegh et al., 2017) مبتنی بر نمونه‌گیری مونت کارلو - زنجیره مارکوف بوده همانند الگوریتم‌های متروپولیس تطبیقی، تکاملی تفاضلی با نام اختصاری DREAM (Differential Evolution Adaptive Metropolis; Vrugt et al., 2009) و روش متروپولیس تکاملی پیچیده جابه‌جا شونده با نام اختصاری SCEM-UA (Shuffled Complex Evolution Metropolis; Vrugt et al., 2003) که روش Hybrid-evolution نسخه تکامل یافته این دو محسوب شده همچنین از مزیت بروزرسانی اسنوکر (Snooker update) برای تولید کاندیدهای جدید استفاده می‌شود. در این روش، با انتخاب تصادفی دو زنجیره و تصویر کردن آن‌ها به طور قائم بر روی مسیر و جمع آن‌ها با اختلاف بین نقاط تصویر شده، کاندید جدید تولید می‌گردد. در این مقاله، از مدل‌های  $PSF^1$  و PDI برای برازش منحنی رطوبتی استفاده شده است. علاوه بر این، از الگوریتم Hybrid-evolution مونت کارلو - زنجیره مارکوف به منظور بررسی عدم قطعیت پارامترهای دو مدل استفاده شده است. سپس خطای دو مدل و عدم قطعیت پارامترهای آن‌ها مورد بحث قرار گرفته و یک مدل با خطای کمتر و عدم قطعیت پارامتریک کمتر پیشنهاد شده است. هدف این تحقیق، سنجش نکویی برازش و عدم قطعیت پارامترهای دو مدل نگهداشت آب PDI و PSF می‌باشد. سپس با استفاده از پارامترهای به‌دست آمده، قدرت پیش‌بینی دو مدل هدایت هیدرولیکی تئوری نفوذ و PDI با هم مقایسه شده است.

## مواد و روش‌ها

### داده‌ها و مدل منحنی رطوبتی

برای مقایسه و اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، خاک‌هایی از بانک انسودا (UNSODA) با بافت‌های متفاوت انتخاب گردید. داده‌ها شامل ۶ نمونه خاک با طیف گسترده‌ای از کلاس‌های بافتی شامل ماسه، رس، لوم شنی، لوم سیلتی و رس سیلتی و اندازه‌گیری‌های نگهداشت رطوبتی و هدایت هیدرولیکی است. در این تحقیق، کامل-ترین فرم مدل نگهداشت رطوبتی PSF مورد استفاده قرار گرفت (Perrier et al., 2000). مدل PSF به خوبی برای توصیف نگهداشت آب در انواع متنوعی از بافت‌های خاک استفاده شده و به صورت معادلات ۱ و ۲ تعریف می‌شود:

$$\theta = \emptyset - \frac{p}{p+s} \left\{ 1 - \left( \frac{h}{h_{min}} \right)^{D-d} \right\} \quad (1)$$

$$p + s + f = 1 \quad (2)$$

که  $\theta$  مقدار حجمی آب،  $\emptyset$  تخلخل،  $h$  مکش،  $h_{min}$  مکشی که بزرگترین منفذ را خالی از آب کرده،  $D$  بعد فرکتال فضای بین حفرات

ابزاری مناسب برای اندازه‌گیری و مقیاس کردن ویژگی‌های متفاوتی از محیط متخلخل که فرض می‌شود خود متشابه هستند، می‌باشد. علاوه بر این، مطالعات اخیر (Hunt et al., 2013) نشان داده است که در محیط‌های بی‌نظم مانند خاک، تئوری نفوذ برای مدل‌سازی هدایت هیدرولیکی بسیار مناسب می‌باشد. از طرفی، رطوبت خاک در محتویات نسبتاً زیاد آب توسط جریان مویینه کنترل شده و در محدوده‌های پایین‌تر رطوبت، جریان توسط نیروهای سطحی و بخار آب کنترل می‌شود. این دو ناحیه، منحنی نگهداشت آب اغلب برای خاک‌هایی با بافت نسبتاً درشت (شنی) قابل تشخیص‌تر است. لذا تئوری نفوذ می‌تواند محدوده مویینه این گونه از خاک‌ها را به خوبی شبیه‌سازی کند. اما ممکن است در مقادیر نسبتاً خشک نتایج آن دچار خطا شود.

برای هدایت هیدرولیکی غیراشباع، به طور مشابه می‌توان مناطق مختلف مویینی و غشایی را در مقادیر نسبتاً زیاد و کم محتویات آب تشخیص داد. آب در محدوده بسیار خشک می‌تواند به شکل بخار حرکت کند. در حالی که جریان مایع ممکن است منقطع شود. واضح است که مدل‌های جامع برای شبیه‌سازی جریان آب در خاک‌های مزرعه نیاز به عملکرد هدایت هیدرولیکی دارند که تمام ویژگی‌های فرایندهای نگهداشت آب در خاک و هدایت هیدرولیکی از محدوده اشباع تا خشک شدن کامل را در بر می‌گیرد. اخیراً، مدل PDI (Peters-Durner-Iden) به صورت مجموعه‌ای از مدل‌های هدایت هیدرولیکی تجربی خاک، از محدوده اشباع تا خشک شدن کامل خاک معرفی شده است (Iden and Durner, 2014; Peters, 2014). مدل پیشنهادی PDI نتایج خوبی در مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده داشت و قادر بود بازه کامل رطوبتی را پوشش دهد.

فرایند حرکت آب در خاک، فرایندی پیچیده بوده و عوامل و نیروهای متعددی همواره بر جریان آب مؤثر هستند. لذا به منظور مدل‌سازی هرچه دقیق‌تر این فرایند، می‌بایست نیروهای همانند نیروی موئینه، نیروی غشایی، حرکت بخار آب و تغییرات توزیع حفرات خاک را در نظر گرفت. با این وجود، باز هم خطاها و با عدم قطعیت‌های مختلف از جمله عدم اطمینان از داده‌های اندازه‌گیری شده، درک فرض مسئله، مدل‌سازی و تعیین پارامترهای مدل باعث شده برآوردهای مدل به دور از واقعیت باشد. فرایند حرکت آب در خاک دارای پارامترهایی است که اندازه‌گیری آن‌ها به صورت مستقیم امکان پذیر نبوده یا بسیار گران قیمت و زمان‌بر خواهد بود. لذا بهتر است که مقادیر اینگونه پارامترها از طریق روش‌های سعی و خطا همانند روش‌های بهینه‌سازی انجام شود. بنابراین تحلیل میزان اطمینان از نتایج واسنجی پارامترهای مدل بسیار ضروری بوده و نقش آن باید

$$b = 0.1 + \frac{0.2}{n^2} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^2 \right] \right\} \quad (7)$$

قابل ذکر است که مقدار  $x$  همانند  $pF$  می‌باشد که در تحقیقات منحنی نگهداشت آب خاک و تنش آبی گیاه استفاده می‌شود. در این تحقیق، برای کاهش تعداد پارامترهای مورد نیاز مدل PDI ساده سازی‌هایی در رابطه با بعضی از پارامترهای این مدل صورت گرفت که شامل برابر قرار دادن  $m = 1 - 1/n$ ، برابر قرار دادن مکش ورود هوا با  $1/\alpha$  و  $h_0$  برابر با مقدار  $6/3 \times 10^6$  سانتی‌متر می‌باشد. آنگاه چهار پارامتر  $\theta_s$ ،  $\theta_r$ ،  $n$  و  $\alpha$  باقی مانده همانند قبل با استفاده از الگوریتم هیبرید تکاملی مونت کارلو - زنجیره مارکوف (Sadegh et al., 2017) تعیین گردیدند.

### الگوریتم عدم قطعیت

الگوریتم هیبرید تکاملی مونت کارلو - زنجیره مارکوف استفاده شده که شامل روش‌های متروپولیس تطبیق پذیر، تکامل-تفاضلی و به روز رسانی اسنوکر می‌باشد. در این الگوریتم ابتدا یک نمونه برداری تصادفی از فضای پارامتری (توزیع پسین) توسط روش آماری Latin Sampling Hypercube انجام شده و نمونه‌ای با بیشترین مقدار درست‌نمایی به عنوان آغازگر زنجیره مارکوف استفاده می‌شود. آنگاه زنجیره‌ها از سه به‌روزرسانی اسنوکر، متروپولیس تطبیق پذیر و تکامل-تفاضلی برای نمونه‌گیری استفاده می‌کنند و در نهایت پیشنهادها در هر به‌روزرسانی در صورت پذیرش توسط معیار متروپولیس وارد زنجیره می‌شوند (برای توضیحات کامل‌تر در مورد این الگوریتم به پژوهش Sadegh et al., 2017 ارجاع داده می‌شود). در این تحقیق هر مدل برای هر گونه خاک به میزان ۲۰۰۰ مرتبه تکرار شد. آنگاه برای بررسی رسیدن به همگرایی پارامترهای مدل از معیار گلن و رابین (R) استفاده خواهد شد. معیار گلن و رابین به میانگین پرش‌های هر زنجیره (W) و واریانس میانگین‌های زنجیره‌ها (B) بستگی داشته و از پارامترهای کل زنجیره‌ها استفاده می‌شود.

$$R^2 = \sqrt{\left( \frac{(m+1)\delta^2}{W} \right) - \left( \frac{n-1}{mn} \right)} \quad (8)$$

که  $R^2$  معیار گلن و رابین،  $m$  تعداد زنجیره‌ها و  $n$  تعداد اجراهای هر زنجیره می‌باشد و  $\delta^2$  از رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

$$\delta^2 = \frac{n-1}{n} W + \frac{1}{n} B \quad (9)$$

پارامتر مورد نظر در زنجیره زمانی به همگرایی خواهد رسید که معیار همگرایی گلن و رابین آن کوچکتر از ۱/۲ شود.

### تابع هدایت هیدرولیکی غیراشباع

تحلیل مسیر بحرانی از نظریه نفوذ، روشی مناسب برای محاسبه

و مواد جامد،  $d$  بعد اقلیدوسی،  $p/(p+s) = \beta$  پارامتر و  $s$  و  $f$  به ترتیب بیانگر نسبت منطقه از خاک که توسط حفرات، جامدات و فرکتال‌ها اشغال شده است می‌باشد. در دو حالت خاص  $s = 0$  و  $p/(p+s) = \emptyset$  این مدل به مدل‌های ماقبل خود تبدیل می‌شود (Rieu & Sposito, 1991; Tyler & Wheatcraft, 1990). یکی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی که به طور گسترده‌ای برای تنظیم پارامترهای مدل استفاده می‌شود، الگوریتم جستجوی مبتنی بر گرادیان یا شیب است که ممکن است به جای نقطه بهینه جهانی، نقطه بهینه محلی را بیابد. به همین دلیل از دو روش برای تعیین پارامترهای این مدل ( $\beta_1$ ,  $h_{min}$ ,  $D_1$ ) استفاده شده است. برای پیدا کردن پارامترهای مدل، و به منظور کاهش احتمال به دام افتادن در نقطه بهینه محلی، از الگوریتم هیبرید تکاملی مونت کارلو - زنجیره مارکوف (Sadegh et al., 2017) استفاده شد.

مدل PDI ترکیبی از دو مدل هدایت هیدرولیکی موئینه و غشایی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta(h) = \theta^{cap}(h) + \theta^{ad}(h) \quad (3)$$

$$= (\theta_s - \theta_r) S^{cap}(h) + S^{ad}(h)$$

که  $S^{cap}$  درجه اشباع نسبی آب موئینه و  $S^{ad}$  درجه اشباع نسبی آب غشایی می‌باشد.  $\theta_s$  رطوبت اشباع و  $\theta_r$  رطوبت باقی مانده بوده که در اینجا برابر رطوبت بیشینه غشایی می‌باشد. تابع  $S^{cap}$  می‌تواند توسط توابع مختلف توزیع حفرات خاک به صورت تک رژیم می‌مانند توابع کوزوگی، ون گنوختن و بروکس و کوری یا به صورت چند رژیم همانند دورن معرفی شود. به منظور اطمینان حاصل کردن از رسیدن به رطوبت صفر در مکش بسیار زیاد ( $h_0 = -10^7$  سانتی متر  $-10^7$ )، توسط تابع موئینه مقیاس‌سازی می‌شود و به صورت زیر می‌باشد.

$$S^{cap}(h) = \frac{\Gamma(h) - \Gamma(h_0)}{1 - \Gamma(h_0)} \quad (4)$$

که  $\Gamma(h)$  می‌تواند هر کدام از توابع توزیع حفرات باشد. در این تحقیق از تابع ون گنوختن برای توزیع حفرات استفاده شد.

$$\Gamma(h) = \left[ \frac{1}{1 + (\alpha|h|)^n} \right]^m \quad (5)$$

که در آن پارامترهای  $\alpha$ ،  $n$  و  $m$  پارامترهای تجربی می‌باشند. همچنین به منظور تعریف تابع درجه اشباع غشایی از تابع خطی دو بخشی زیر استفاده گردید (Iden and Durner, 2014).

$$S^{ads}(h) = 1 + \frac{1}{x_a - x_0} \left\{ x - x_a + b \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{x_a - x}{b} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

که در آن  $x_0 = \log_{10}(|h_0|)$ ،  $x = \log_{10}(|h|)$ ،  $x_a = \log_{10}(|h_a|)$  مکش ورود هوا و  $b$  پارامتر مسطح کننده است که برابر است با:

زیر تعریف می‌شود (Saito et al., 2006).

$$K^{vap} = \frac{\rho_{vs}}{\rho_w} D \frac{Mg}{RT} H_r \quad (15)$$

که  $\rho_{vs}$  چگالی بخار آب اشباع،  $\rho_w$  چگالی آب مایع،  $D$  پخشیدگی بخار آب در خاک،  $M$  وزن ملکولی آب،  $g$  شتاب گرانش زمین،  $R$  ثابت جهانی گاز،  $T$  دمای مطلق و  $H_r$  رطوبت نسبی می‌باشد. پخشیدگی بخار آب در خاک را می‌توان از تابع زیر به دست آورد

$$D = \tau_a \theta_a D_a \quad (16)$$

که  $\tau_a$  ضریب اعوجاج در محیط گاز،  $\theta_a$  مقدار حجمی هوا و  $D_a$  پخشیدگی بخار آب در هوا است. ضریب اعوجاج در محیط گاز توسط تابع زیر قابل محاسبه است.

$$\tau_a = \frac{\theta_a^{7/3}}{\phi^2} \quad (17)$$

پارامترهای پخشیدگی بخار آب و چگالی بخار آب اشباع نیز به عنوان تابعی از دما تعریف می‌شوند.

$$D_a = 2.14 \times 10^{-5} \left( \frac{T}{273.15} \right)^2 \quad (18)$$

و

$$\rho_{vs} = 10^3 \exp \left( 31.3716 - \frac{6014.79}{T} - 7.92495 \times 10^{-3} T \right) T^{-1} \quad (19)$$

همچنین رطوبت نسبی از رابطه کلین به دست می‌آید

$$H_r = \exp \left( - \frac{Mg|h|}{RT} \right) \quad (20)$$

هدایت هیدرولیکی کل مدل PDI مطابق رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$K^{total} = K^{liq} + K^{vap} \quad (21)$$

### سنجش خطا

ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی از طریق مقایسه هدایت هیدرولیکی شبیه‌سازی شده و مشاهده شده با استفاده از معیارهای مختلفی از سنجش خطا انجام می‌شود. معیار اطلاعات آکائیک معیاری برای سنجش نیکویی برازش است و بر اساس مفهوم انترپی بنا شده است. این معیار تعادلی میان دقت مدل و پیچیدگی آن برقرار می‌کند و به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$AIC = 2n_p + n \ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{n} \right\} - 2CS \quad (22)$$

که  $O$  مشاهدات،  $P$  برآوردهای مدل،  $n$  تعداد اندازه‌گیری‌ها،  $n_p$  تعداد پارامترهای مدل و  $CS$  مقدار ثابت می‌باشد. بین چند مدل انتخابی برای داده‌ها، مدلی انتخاب می‌شود که کمترین مقدار  $AIC$  را داشته باشد. معیار اطلاعات بیزین نیز شامل خطایی است که با ازای آن تعداد پارامترهای برآوردگر افزایش می‌یابد و مطابق زیر محاسبه

هدایت هیدرولیکی غیراشباع می‌باشد. بر این اساس، هدایت هیدرولیکی نسبی غیراشباع ( $K_r$ ) می‌تواند از مدل نگهداست آب PSF حاصل گردد و به صورت زیر نوشته می‌شود (Hunt & Gee, 2002).

$$K_r = \frac{K(\theta)}{K_s(\theta)} \quad (10)$$

$$= \begin{cases} \left[ \frac{\beta - \theta + \theta - \theta_t}{\beta - \theta_t} \right]^{\frac{\lambda}{3-D}} & \theta_x < \theta < \theta_s \\ \left[ \frac{\beta - \theta + \theta_x - \theta_t}{\beta - \theta_t} \right]^{\frac{\lambda}{3-D}} \left[ \frac{\theta - \theta_t}{\theta_x - \theta_t} \right]^2 & \theta_t < \theta < \theta_x \end{cases}$$

که  $K_s(\theta)$  هدایت هیدرولیکی اشباع،  $\theta_t$  مقدار بحرانی پخشیدگی رطوبت حجمی بوده که در این تحقیق مقدار آن برابر با نقطه پژمردگی دائم در نظر گرفته شده است. تابع هدایت هیدرولیکی ارائه شده در معادله (۱۰) به منظور مدل سازی هدایت هیدرولیکی مویینه در محیط متخلخل توسعه داده شده و در فشارهای بالا که نیروی عشایی و پخشیدگی بخار آب عامل اصلی جابه‌جایی آب می‌باشند، نتایج ضعیفی را نشان می‌دهد.  $\theta_x$  نقطه گذر به مقیاس نفوذ جهانی (universal percolation scaling) و طبق معادله (۱۱) محاسبه می‌گردد.

$$\theta_x = \theta_t + \left[ \frac{2(\beta - \theta)}{\frac{\lambda}{3-D} - 2} \right] \quad (11)$$

همچنین برای مدل PDI سه تابع هدایت هیدرولیکی تعریف کرده که معادل حرکت مویینه، غشایی و بخار آب در خاک است. مدل مویینی هدایت هیدرولیکی با در نظر گرفتن تابع توزیع حفرات ون گنوتن و به صورت مقیاس شده برابر است با:

$$K_r^{cap} = (S^{cap})^l \left( 1 - \left( \frac{1 - \Gamma(h)^{1/m}}{1 - \Gamma(h_0)^{1/m}} \right)^m \right)^2 \quad (12)$$

که  $l$  یک پارامتر تجربی اعوجاج و اتصالات بوده که معمولاً مقدار ۰/۵ برای آن فرض می‌شود.

$$K_r^{film} = \left( \frac{h_0}{h_a} \right)^{a(1-S^{ads})} \quad (13)$$

که در آن  $a$  یک پارامتر تجربی می‌باشد. سپس هدایت هیدرولیکی جریان مایع را می‌توان به صورت تابعی تجمعی از هدایت مویینه و غشایی نوشت که به صورت زیر می‌باشد:

$$K^{liq} = K^{cap} + K^{film} = K_s^{cap} K_r^{cap} (S^{cap}) + K_s^{film} K_r^{film} (S^{ads}) \quad (14)$$

اما با افزایش فشار و وقتی خاک به سمت خشک شدن پیش می‌رود، پیوستگی جریان قطع شده و حرکت بخار آب در خاک کنترل کننده میزان هدایت هیدرولیکی خاک خواهد بود. به منظور مدل سازی حرکت بخار آب فرض می‌شود که گرادیان پتانسیل جاذبه ناچیز می‌باشد (Mehta et al., 1994). هدایت هیدرولیکی بخار آب مشابه

می‌گردد.

$$BIC = n_p \ln n + n \ln \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{n} \right\} - 2CS \quad (23)$$

جزر ریشه میانگین مربعات خطا نرمال و معیار نش - ساتکلیف نیز معیارهای سنجش خطای خوبی برای مقایسه داده‌ها با مقیاس متفاوت می‌باشند.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2} \quad (24)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \quad (25)$$

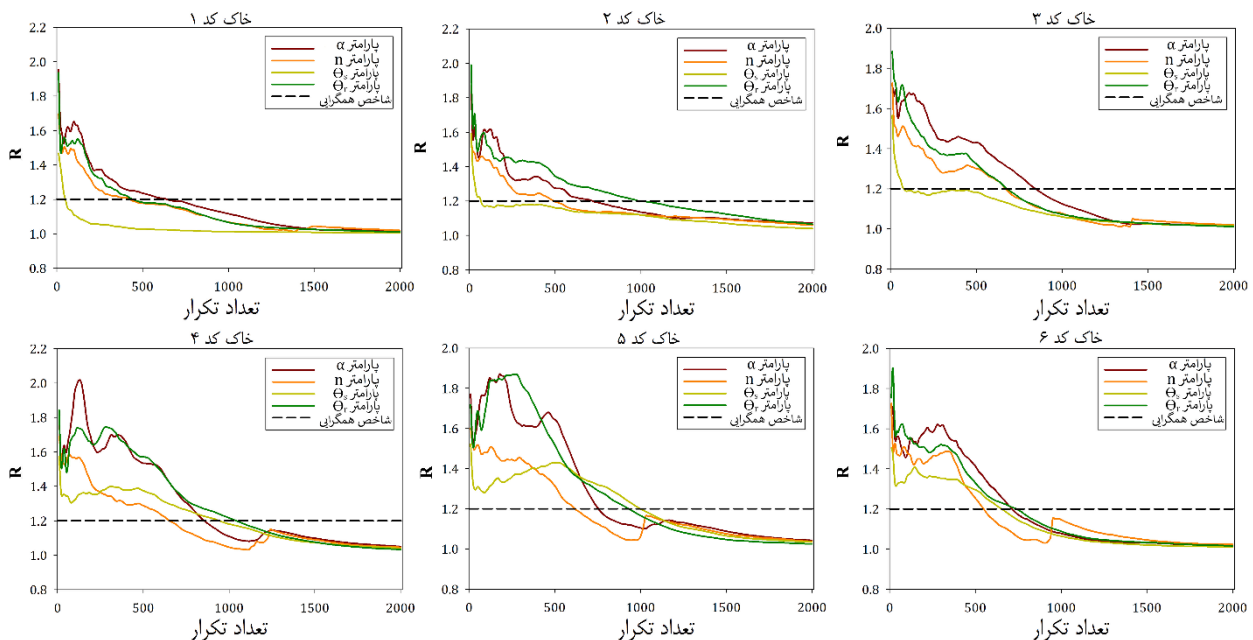
## نتایج و بحث

### تحلیل برازش مدل‌های منحنی رطوبتی

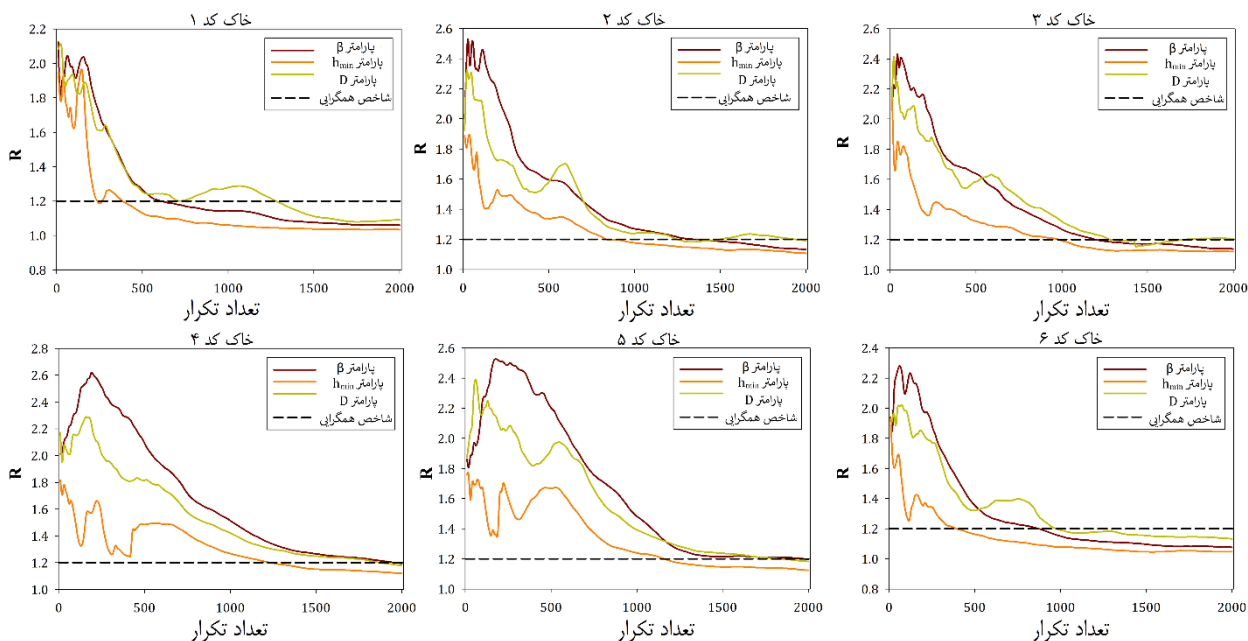
در فرایند زهکشی آب از خاک در ابتدا تمامی مسیرهای آب در خاک به هم متصل می‌باشند و کاملاً پر از آب هستند تا اینکه به مکش ورود هوا رسیده و مسیرها خالی از آب شده و ارتباط بین آن‌ها قطع می‌شود و بدین خاطر هدایت هیدرولیکی کاهش می‌یابد. در این تحقیق از تمامی بازه منحنی رطوبتی برای پیش‌بینی پارامترهای هر دو مدل PDI و PSF استفاده شد و همچنین تعداد اجراهای مدل

نگهداشت آب خاک برای رسیدن به همگرایی در تمامی خاک‌های مورد مطالعه برابر با ۲۰۰۰ بود. همگرایی پارامترهای ایجاد شده در زنجیره مارکوف وابسته به این است که معیار گلن و رابین کمتر از ۱/۲ باشد. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب نشان دهنده همگرایی پارامترها و تغییرات معیار گلن و رابین در برابر تعداد تکرار برای مدل‌های PDI و PSF می‌باشد.

در شکل ۱ مشاهده می‌شود که تمامی پارامترهای مدل PDI تا قبل از ۱۰۰۰ تکرار به همگرایی می‌رسند و در این میان پارامتر n از تابع توزیع حفرات ون گنختن از مابقی پارامترها سریع‌تر همگرا می‌شود. از طرف دیگر همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، پارامترهای مدل PSF نیاز به تعداد بیشتری از ۱۰۰۰ تکرار برای رسیدن همگرایی نیاز دارد که در میان آن‌ها پارامتر D در تمامی موارد دیرتر از مابقی به همگرایی می‌رسد. اما با وجود تعداد کمتر تکرار در مدل PDI برای رسیدن به همگرایی پارامترها تفاوت زمانی اجرای این مدل با مدل PSF تقریباً برابر است چراکه مدل PDI یک پارامتر بیشتر از مدل دیگر داشته و چون تعداد زنجیره دوبرابر پارامترها در نظر گرفته می‌شود در این مدل ۲ زنجیر اضافی نسبت به مدل PSF خواهیم داشت و این سبب می‌شود که محاسبات بیشتری در هر تکرار انجام شود. لذا هر دو مدل PDI و PSF از لحاظ زمان لازم برای همگرایی تقریباً مشابه عمل می‌کنند.



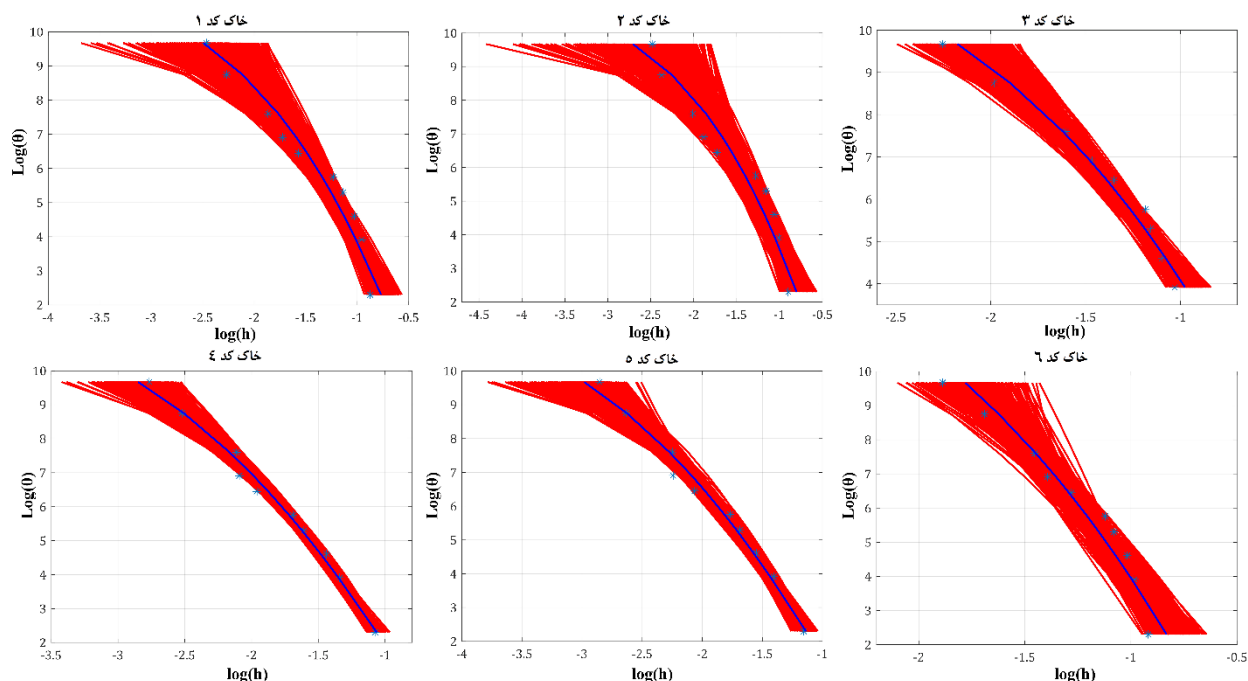
شکل ۱- نمودارهای همگرایی پارامترها با استفاده از معیار گلن و رابین (R) به دست آمده از برازش مدل PDI بر داده‌های نگهداشت آب خاک در خاک‌های مورد مطالعه



شکل ۲- نمودارهای همگرایی پارامترها با استفاده از معیار گلمن و رایبن (R) به دست آمده از برازش مدل PSF بر داده‌های نگهداشت آب خاک در خاک‌های مورد مطالعه

می‌باشد و مقایسه دو شکل ۳ و ۴ نشان می‌دهد که مدل PDI به علت همگرایی سریعتر محدوده عدم قطعیت کوچکتری دارد.

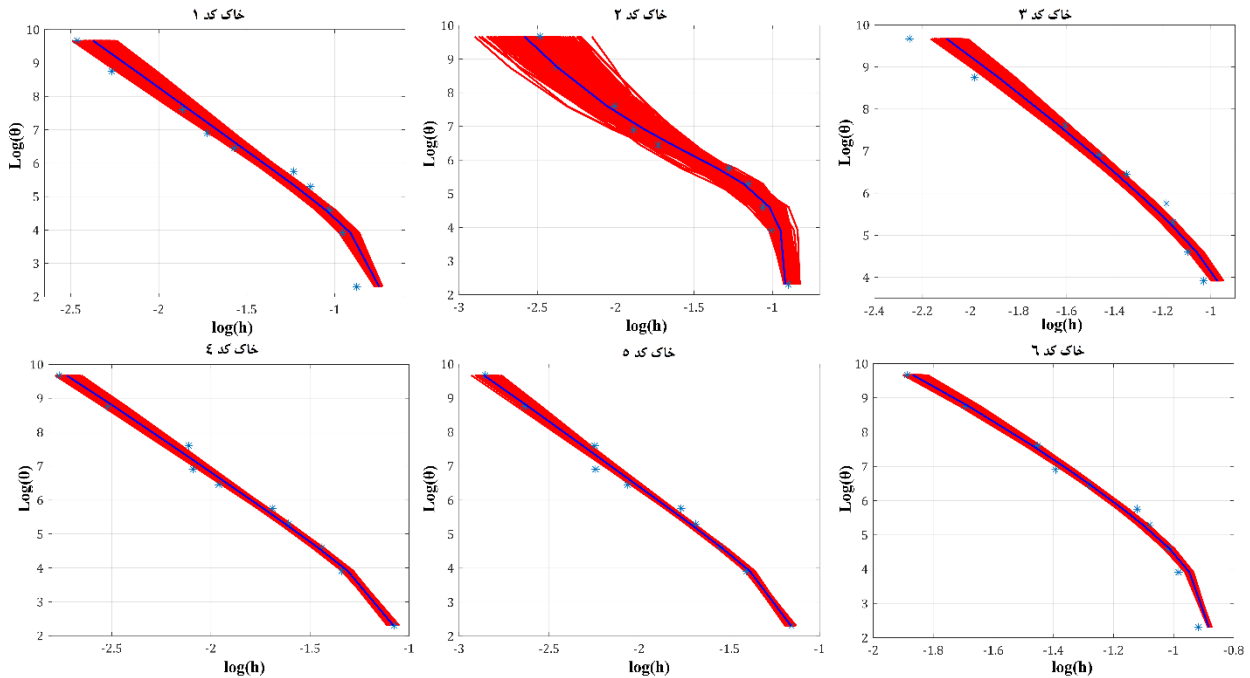
شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب برازش مدل‌های PSF و PDI را بر داده‌های نگهداشت آب ۶ خاک مورد مطالعه نشان می‌دهد. محدوده قرمز رنگ نشانگر عدم قطعیت پارامتریک مدل بعد از ۲۰۰۰ تکرار



شکل ۳- نمودارهای برازش مدل PSF بر داده‌های نگهداشت آب ۶ خاک مورد مطالعه. نقاط آبی رنگ مقادیر مشاهداتی نگهداشت آب در خاک و بیشترین مقدار درست‌نمایی مربوط به خط آبی رنگ، و باند قرمز عدم قطعیت پارامتریک را نشان می‌دهد.

کاملاً فیزیکی در مدل می‌باشد که این پارامترها هر کدام بیانگر یک ویژگی از محیط متخلخل بوده، ولی مدل نگهداشت آب PDI دارای پارامترهایی تجربی است که گرچه می‌توانند باعث برازش بهتر مدل شوند، اما فاقد معنای فیزیکی می‌باشند.

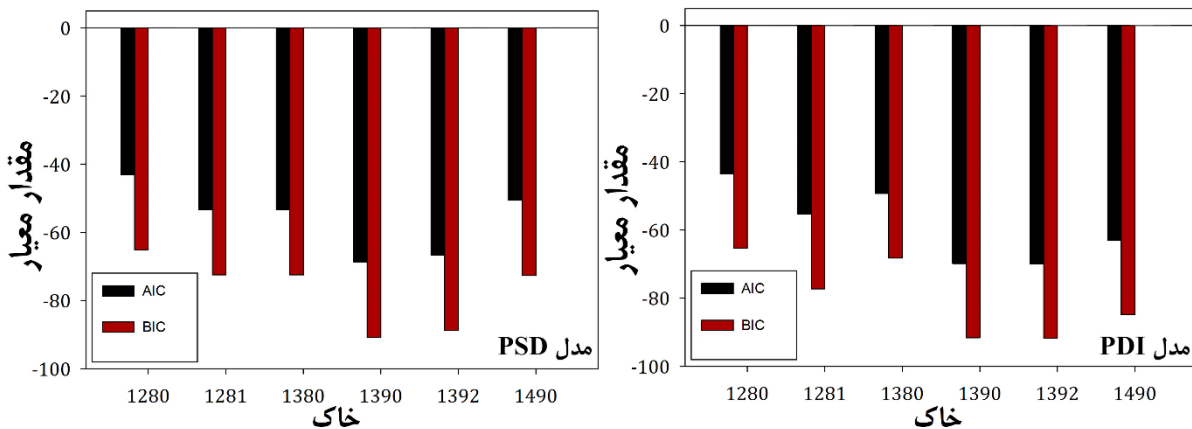
مدل نگهداشت آب خاک PDI در صورتی که پارامتر  $m$  یک پارامتر آزاد فرض شود و نه وابسته به  $n$  می‌تواند برازش بهتری نیز داشته باشد. اما این فرض باعث می‌شود که تعداد پارامترهای واسنجی مدل به ۵ عدد افزایش یابد و حجم محاسبات شدیداً افزایش پیدا کند. برتری مدل PSF نسبت به مدل PDI استفاده از پارامترهایی با معنای



شکل ۴- نمودارهای برازش مدل PDI بر داده‌های نگهداشت آب ۶ خاک مورد مطالعه. نقاط آبی رنگ مقادیر مشاهداتی نگهداشت آب در خاک و بیشترین مقدار درست‌نمایی مربوط به خط آبی رنگ، و باند قرمز عدم قطعیت پارامتریک را نشان می‌دهد.

پارامترهای مورد نیاز مدل PSF، استفاده از این مدل نسبت به مدل PDI ارجحیت داشته و در تمامی موارد مقادیر این دو شاخص مقدار کمتری را برای مدل PSF نشان دادند (شکل ۵).

نتایج بررسی مقادیر معیار خطاهای NSE و RMSE نشان داد که هر دو مدل برازش خوبی بر داده‌های اندازه‌گیری شده نگهداشت رطوبتی داشته‌اند و تفاوت دو مدل بسیار اندک می‌باشد. اما معیارهای خطای اطلاعات آکائیک و بیزین نشان دادند که به علت کمتر بودن

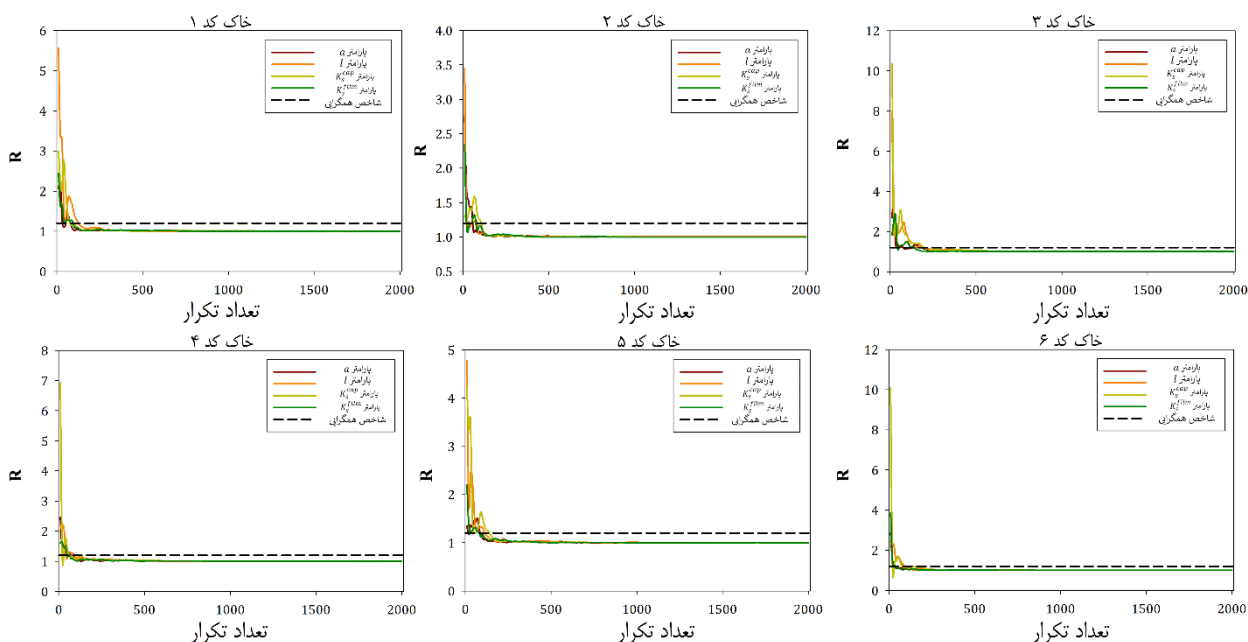


شکل ۵- نمودارهای معیارهای خطای اطلاعات آکائیک، اطلاعات بیزین، NSE و RMSE محاسبه شده از پیش‌بینی مدل‌های PDI و PSF

### هدایت هیدرولیکی غیر اشباع

به منظور پیش‌بینی هدایت هیدرولیکی غیر اشباع، از نتایج حاصل از برآورد پارامترهای مدل‌های نگهداشت آب در مدل‌سازی هدایت هیدرولیکی استفاده می‌شود. لذا، با قرار دادن پارامترهای مدل PDI و PSF به ترتیب در معادلات (۱۴) و (۱۰) مربوط به مدل‌های PDI و تئوری نفوذ، هدایت هیدرولیکی این خاک‌ها پیش‌بینی می‌شود. قابل ذکر است که تابع هدایت هیدرولیکی غیر اشباع PDI نیز همچنین نیاز به واسنجی ۴ پارامتر دارد که این چهار پارامتر شامل پارامتر تجربی اعوجاج و اتصالات ( $l$ )، پارامتر تجربی  $a$ ، هدایت هیدرولیکی اشباع مویینه و غشایی می‌باشند. با وجود اینکه پارامتر  $l$  در معدودی از تحقیقات برابر ۰/۵ فرض شده، اما در این تحقیق، مقدر این پارامتر

برای برازش بهتر مدل با واسنجی به‌دست آمده است. همچنین، در صورتی که مقدار هدایت هیدرولیکی اشباع مویینه برای خاک مورد نظر اندازه‌گیری شده باشد آن مقدار را می‌توان مستقیماً استفاده کرد. اما دو پارامتر دیگر که مربوط به حرکت غشایی آب در خاک هستند را نمی‌توان مستقیماً اندازه‌گیری کرد. از این رو، در بهترین شرایط نیاز به واسنجی این دو پارامتر با استفاده از داده‌های هدایت هیدرولیکی غیر اشباع می‌باشد. همچنین نیاز است که بیش از ۳ اندازه‌گیری هدایت هیدرولیکی در شرایط نیاز به برآورد ۲ پارامتر و ۵ اندازه‌گیری در صورت مجهول بودن هر ۴ پارامتر موجود باشد. نتایج همگرایی پارامترهای تابع هدایت هیدرولیکی PDI در شکل ۶ قابل مشاهده است.



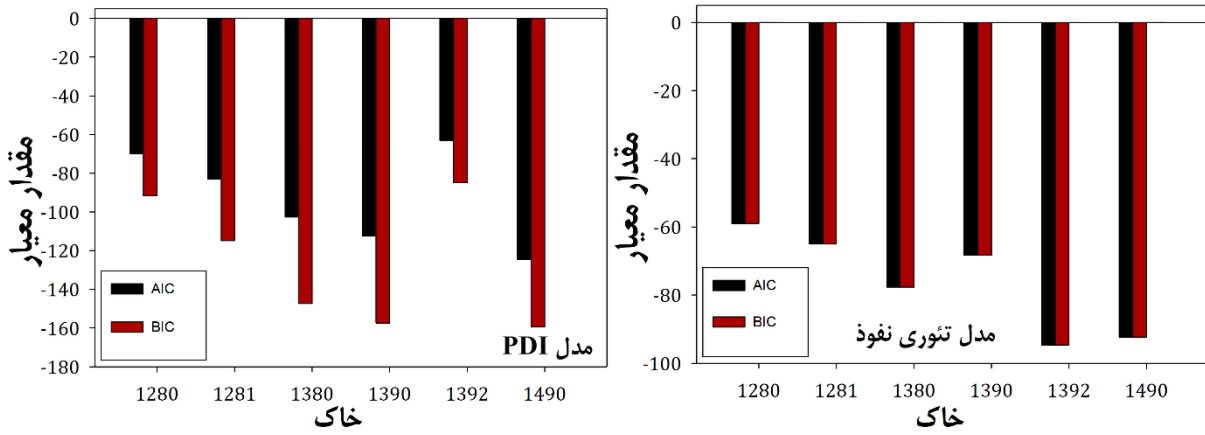
شکل ۶ - نمودارهای همگرایی پارامترها با استفاده از معیار گلن و رابین (R) به دست آمده از برازش مدل PDI بر داده‌های هدایت هیدرولیکی غیر اشباع در خاک‌های مورد مطالعه

در شکل‌های ۸ و ۹ نیز قابل مشاهده است.

نتایج معیارهای خطا (شکل ۷ و جدول ۱) نشان می‌دهد که در تمامی خاک‌های مورد مطالعه مدل تئوری نفوذ عملکرد قویتری نسبت به مدل PDI داشته است. همچنین مدل تئوری نفوذ به علت استفاده از پارامترهای به‌دست آمده از برازش منحنی رطوبتی با مدل PSF نیازی به واسنجی با مقادیر اندازه‌گیری شده هدایت هیدرولیکی نداشته و به همین دلیل مدل بسیار مناسب‌تری نسبت به مدل PDI می‌باشد.

همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود پارامترهای مدل هدایت هیدرولیکی PDI در تمامی موارد تقریباً با ۳۰۰ تکرار به همگرایی می‌رسند و واسنجی پارامترهای مدل هدایت هیدرولیکی PDI حجم محاسباتی بسیار کمتری نسبت به مدل نگهداشت آب در خاک دارد. نتایج نکوبی برازش و معیارهای خطا در شکل ۷ قابل مشاهده است. همچنین بررسی نتایج دو معیار خطا RMSE و NSE نشان می‌دهد که مدل نگهداشت آب PDI برازش بهتری داشته اما این تفاوت بسیار اندک می‌باشد. ولی مدل هدایت هیدرولیکی تئوری نفوذ پیش‌بینی بسیار بهتری نسبت به مدل PDI دارد و این امر به وضوح

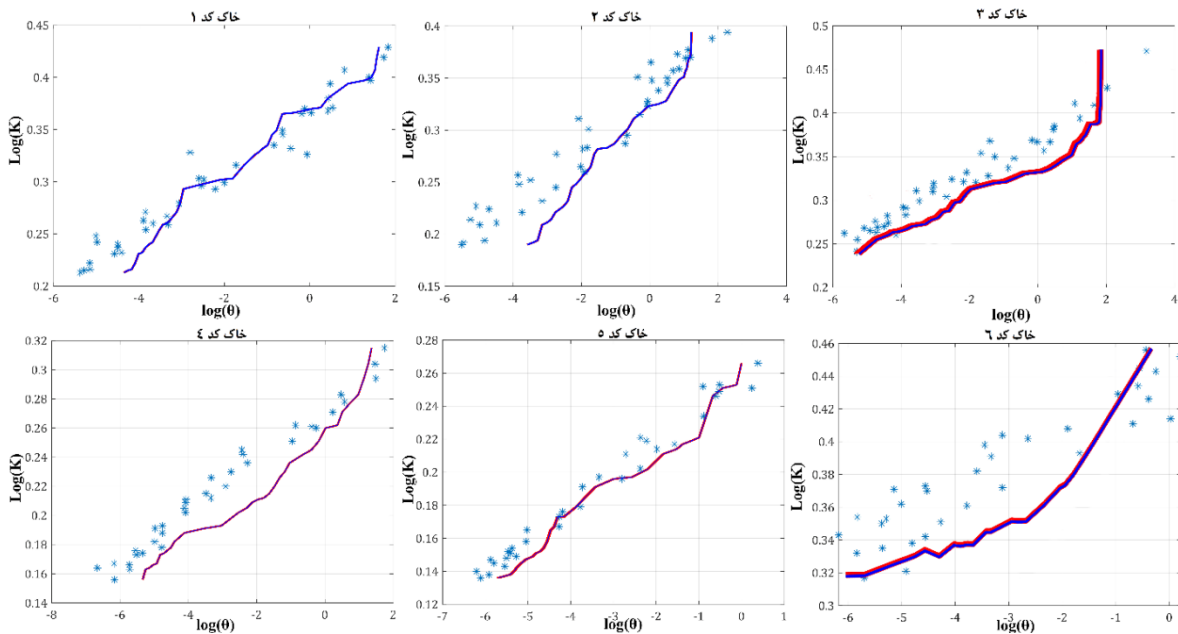




شکل ۷- نمودارهای معیارهای خطای اطلاعات آکانیک، اطلاعات بی‌بین، NSE و RMSE محاسبه شده از پیش‌بینی مدل‌های PDI و PSF

جدول ۱- مقادیر معیارهای خطای مدل‌های نگهداشت آب و هدایت هیدرولیکی خاک‌های مورد مطالعه.

معیار خطا	۱۲۸۰	۱۲۸۱	۱۳۸۰	۱۳۹۲	۱۳۹۰	۱۳۸۰	۱۴۹۰			
NSE	۰/۹۴۲	۰/۹۷۸	۰/۹۸۱	۰/۹۹۲	۰/۹۸۸	۰/۹۴۵	۰/۹۴۵	PSF	مدل نگهداشت آب	
	۰/۰۸۶	۰/۰۳۷	۰/۰۳۳	۰/۰۲۴	۰/۰۲۶	۰/۰۵۹	۰/۰۵۹			
RMSE	۰/۹۵۵	۰/۹۸۷	۰/۹۷۲	۰/۹۹۴	۰/۹۹۳	۰/۹۸۷	۰/۹۸۷	PDI		
	۰/۰۷۶	۰/۰۴۲	۰/۰۴۱	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰	۰/۰۲۹	۰/۰۲۹			
NSE	۰/۹۴۸	۰/۹۶۵	۰/۹۸۹	۰/۹۲۵	۱/۰۰۰	۰/۴۴۵	۰/۴۴۵	Theoretical Infiltration	مدل هدایت هیدرولیکی	
	۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۰۴۰	۰/۰۳۸	۰/۰۲۹	۰/۰۵۵	۰/۰۵۵			
RMSE	۰/۹۱۶	۰/۸۶۶	۰/۶۱۳	۰/۵۷۴	۰/۹۰۵	۰/۴۱۶	۰/۴۱۶	PDI		
	۰/۰۳۹	۰/۰۴۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۳۹	۰/۰۶۰	۰/۰۶۰			

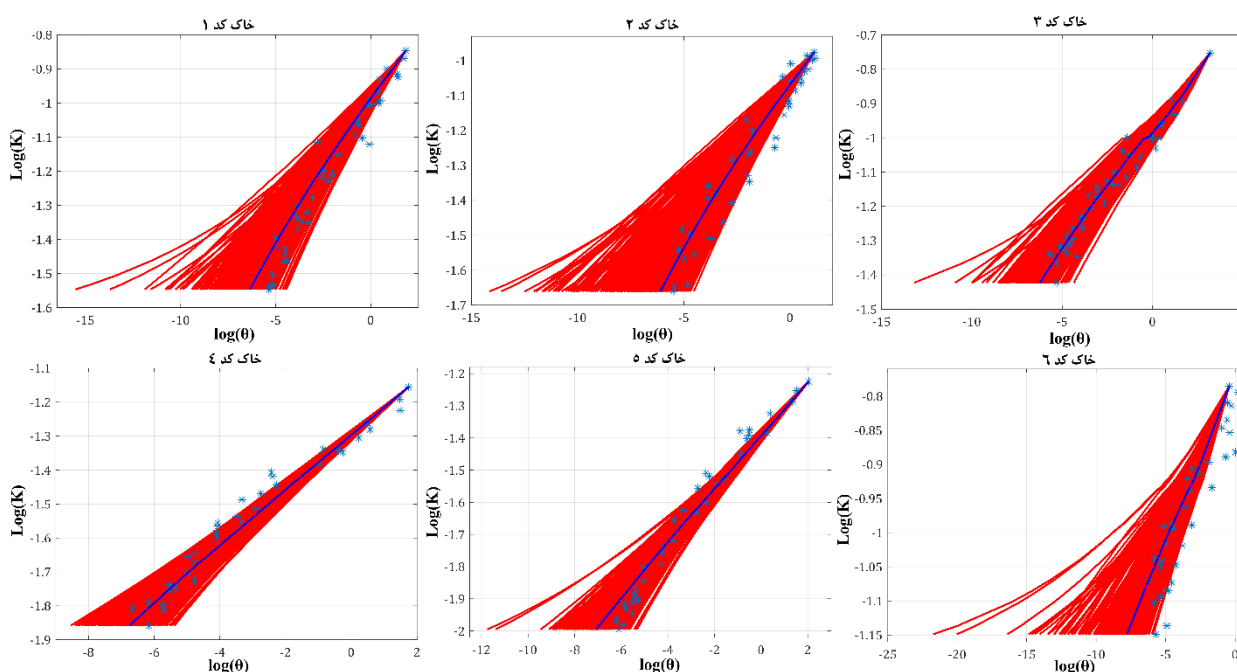


شکل ۸- نمودارهای برازش مدل PDI بر داده‌های هدایت هیدرولیکی خاک مورد مطالعه. نقاط آبی رنگ مقادیر مشاهده‌ای هدایت هیدرولیکی و بیشترین مقدار درست‌نمایی مربوط به خط آبی رنگ، و باند قرمز عدم قطعیت پارامتریک را نشان می‌دهد.

شد که برای تعیین هدایت موینگی از معادله ون گنوختن استفاده می- کند اما تفاوت آن در این است که مدل PDI به دلیل بهره بردن از دو مدل دیگر هدایت هیدرولیکی غشایی و بخار آب برآورد دقیق تری در رطوبت های کم نسبت به مدل ون گنوختن دارد ( Saki et al., 2015). لذا با توجه به اینکه عملکرد این دو مدل تا به حال با هم مقایسه نشده است، نتایج این تحقیق نشان داد که مدل PDI در رطوبت های کم، بهتر از مدل تئوری نفوذ عمل کرده و در رطوبت های بالا مدل تئوری نفوذ اندکی برآورد بهتری دارد ولی مدل تئوری نفوذ زمان بیشتری برای همگرایی پارامترهای خود احتیاج دارد.

شکل های ۸ و ۹ برازش هر دو مدل تئوری نفوذ و PDI را نشان می دهد. به وضوح مشخص است که تابع تئوری نفوذ برازش بسیار بهتری نسبت به مدل PDI دارد. در نتیجه مدل تئوری نفوذ به علت حجم محاسباتی کمتر و همچنین نکویی برازش بالاتر به عنوان مدل بهتر پیشنهاد می شود.

تحقیقات پیشین (Ghanbarian et al., 2012) همچنین نشان می دهند که هر دو مدل تئوری نفوذ و مدل ون گنوختن در رطوبت های کم یا فشار بالا، کم برآورد می کنند و این مسئله در مدل تئوری نفوذ مشهود تر می باشد. اما در رطوبت های بالا هر دو مدل دارای برآورد خوبی می باشند. از طرفی، در این تحقیق از مدل PDI استفاده



شکل ۹- نمودارهای برازش مدل تئوری نفوذ بر داده های هدایت هیدرولیکی ۶ خاک مورد مطالعه. نقاط آبی رنگ مقادیر مشاهداتی هدایت هیدرولیکی و بیشترین مقدار درستیابی مربوط به خط آبی رنگ، و باند قرمز عدم قطعیت پارامتریک را نشان می دهد.

اشباع چند خاک از پایگاه داده UNSODA اعتبار سنجی شد. نتایج نشان داد که هر دو روش PSF و PDI از لحاظ حجم محاسبات مشابه بوده و همچنین ۴ معیار خطاسنجی نشان دادند که تفاوت بسیار اندکی در قدرت پیش بینی منحنی رطوبتی این دو مدل وجود دارد. اما قدرت پیش بینی مدل PDI در تخمین هدایت هیدرولیکی غیر اشباع کمتر از مدل تئوری نفوذ می باشد. همچنین مدل PDI به علت نیاز به واسنجی ۴ پارامتر حداقل به ۵ داده از پیش اندازه گیری شده هدایت هیدرولیکی نیاز دارد و این یکی از نقطه ضعف های این مدل می باشد. لذا با توجه به نتایج معیارهای سنجش خطا، عدم قطعیت و زمان لازم برای اجرای هر مدل، مدل پیشنهادی در تمامی خاک های مورد بررسی روش فرکتال تئوری نفوذ می باشد.

## نتیجه گیری

در این پژوهش، به مقایسه و ارزیابی پیش بینی هدایت هیدرولیکی غیر اشباع با استفاده از داده های منحنی رطوبتی آب خاک دو مدل PDI و تئوری نفوذ (PSF) پرداخته شد. بدین منظور از الگوریتم بهینه سازی Hybrid-evolution مونت کارلو - زنجیره مارکوف استفاده شده که شامل روش های متروپولیس تطبیق پذیر، تکامل تفاضلی و به روز رسانی اسنوکر بوده و با استفاده از آن می توان بهینه ترین جواب پارامتر مدل ها را به دست آورده و همچنین عدم قطعیت پارامتریک را در رسیدن به جواب نهایی نشان داد. عملکرد مدل ها با استفاده از داده های نگهداشت آب و هدایت هیدرولیکی غیر

- solids. *Trans. Faraday Soc.* 57(8), 1200–1207.
- Perrier, E., Bird, N., Rieu, M., 2000. Generalizing the fractal model of soil structure: the pore—solid fractal approach. *Developments in Soil Science*. Vol. 27. Elsevier, 47–74.
- Peters, A., 2014. Reply to comment by S. Iden and W. Durner on “Simple consistent models for water retention and hydraulic conductivity in the complete moisture range”, *Water Resour. Res.*, 50, 7535–7539, doi:10.1002/2014WR016107
- Rieu, M., Sposito, G., 1991. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55, 1231–1238.
- Tyler, S.W., Wheatcraft, S.W., 1989. Application of Fractal Mathematics to Soil Water Retention Estimation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 53, 987. doi:10.2136/sssaj1989.03615995005300040001x
- Sadegh, M., Ragno, E., AghaKouchak, A., 2017. Multivariate Copula Analysis Toolbox (MvCAT): Describing dependence and underlying uncertainty using a Bayesian framework. *Water Resour. Res.* 53, 5166–5183. doi:10.1002/2016WR020242
- Saito, H., Simunek, j., Mohanty, B. P., 2006. Numerical analysis of coupled water, vapor, and heat transport in the vadose zone. *Vadose Zone J.*, 5(2), 784–800, doi:10.2136/vzj2006.0007
- Sakai, M., Van Genuchten, M.T., Alazba, A.A., Setiawan, B.I., Minasny, B. A., 2015. complete soil hydraulic model accounting for capillary and adsorptive water retention, capillary and film conductivity, and hysteresis. *Water Resources Research*. 51(11):8757-72.
- Vrugt, J.A., Gupta, H.V., Bouten, W., Sorooshian. S. A., 2003. Shuffled Complex Evolution Metropolis algorithm for optimization and uncertainty assessment of hydrologic model parameters. *Water Resources Research*. 39(8).
- Vrugt, J.A., Ter Braak, C.J., Diks, C.G., Robinson, B.A., Hyman, J.M., Higdon, D., 2009. Accelerating Markov chain Monte Carlo simulation by differential evolution with self-adaptive randomized subspace sampling. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 10(3):273-90.
- Zand-Parsa, S., 2006. Improved soil hydraulic conductivity function based on specific liquid-vapour interfacial area around the soil particles. *Geoderma* 132, 20–30. doi:10.1016/j.geoderma.2005.04.020
- Zand-Parsa, S., Sepaskhah, A.R., 2004. Soil hydraulic conductivity function based on specific liquid-vapor interfacial area around the soil particles. *Geoderma* 119, 143–157. doi:10.1016/S0016-7061(03)00258-1
- زرین فرس، قهرمان، ب.، داوری، ک. ۱۳۹۰. ارائه توابع انتقالی جهت پیش بینی هدایت هیدرولیکی اشباع خاک های گراولی با استفاده از رگرسیون حداقل مربعات جزئی، آب و خاک. ۲۵: ۶۱۷–۶۲۴
- Alfaro Soto, M.A., Chang, H.K., van Genuchten, M.T., 2017. Fractal-based models for the unsaturated soil hydraulic functions. *Geoderma* 306, 144–151. doi:10.1016/j.geoderma.2017.07.019
- Cihan, A., Sukop, M.C., Tyner, J.S., Perfect, E., Huang, H., 2009. Analytical Predictions and Lattice Boltzmann Simulations of Intrinsic Permeability for Mass Fractal Porous Media. *Vadose Zo. J.* 8, 187. doi:10.2136/vzj2008.0003
- Crawford, J.W., 1994. The relationship between structure and the hydraulic conductivity of soil. *Eur. J. Soil Sci.* 45, 493–502.
- Guarracino, L., Rötting, T., Carrera, J., 2014. A fractal model to describe the evolution of multiphase flow properties during mineral dissolution. *Adv. Water Resour.* 67, 78–86. doi:10.1016/j.advwatres.2014.02.011
- Ghanbarian, B., Hunt, A.G., 2012. Unsaturated hydraulic conductivity in porous media: Percolation theory. *Geoderma*. 187:77-84.
- Ghanbarian, B., Hunt, A.G., Daigle, H., 2016. Fluid flow in porous media with rough pore-solid interface. *Water Resour. Res.* 52, 2045–2058
- Hunt, A.G., Gee, G.W., 2002. Application of critical path analysis to fractal porous media: Comparison with examples from the Hanford site. *Adv. Water Resour.* 25, 129–146. doi:10.1016/S0309-1708(01)00057-4
- Hunt, A.G., Ghanbarian, B., Saville, K.C., 2013. Unsaturated hydraulic conductivity modeling for porous media with two fractal regimes. *Geoderma* 207–208, 268–278. doi:10.1016/j.geoderma.2013.05.023
- Iden, S. C., Durner, W., 2014. Comment on “Simple consistent models for water retention and hydraulic conductivity in the complete moisture range” by A. Peters, *Water Resour. Res.*, 50, 7530–7534, doi:10.1002/2014WR015937
- Kitanidis, P.K., and Bras, R.L., 1980. Real-Time Forecasting with a Conceptual Hydrologic Model. Part I: Analysis of Uncertainty, *Water Resources Research*. 16: 6.1025-1033
- Mehta, B. K., Shiozawa, S., Nakano M., 1994. Hydraulic properties of a sandy soil at low water contents. *Soil Sci.* 157(4), 208–214.
- Millington, R., Quirk J. P., 1961. Permeability of porous

## Evaluating the Prediction of two Unsaturated Hydraulic Conductivity Models by Considering Parameters' Uncertainty

A. Modaresi Rad<sup>1</sup>, B. Ghahraman<sup>2\*</sup>, A. Mosaedi<sup>3</sup>, M. Sadegh<sup>4</sup>

Received: Jun.18, 2019

Accepted: Nov.01, 2019

### Abstract

Unsaturated hydraulic conductivity ( $K(\theta)$ ) is proportional to volumetric water content in vadose zone and the obtained  $K(\theta)$  curve is crucial for modeling the soil water movement. Numerous theories and models have been recently proposed regarding the estimation of  $K(\theta)$  that despite improving model predictions, each has a disadvantage of its own. The critical path analysis from percolation theory attempts to improve the prediction of  $K(\theta)$  by simplifying the complex geometry of the porous medium. In addition, the recently developed Peters-Durner-Iden model (PDI) has shown high potential for prediction of  $K(\theta)$ . In this research, both percolation theory and PDI models are evaluated. Also, by using Monte Carlo- Markov chain method, the uncertainty of the simulated parameters is assessed. In this study, the Hybrid-Evolution Monte Carlo-Markov chain algorithm has been utilized, that employs adaptive metropolis, differential-evolution, and Snooker update algorithms, which minimizes the number of iterations required to search parametric space. Goodness of fit measures shows higher results for prediction of  $K(\theta)$  by percolation theory and in every case except for a single soil, the Nash-Sutcliffe criterion was higher than 0.9. In addition, the number of parameters required for the PDI model is more than percolation theory, which leads to an increase in parameter- associated uncertainty. It is also discussed that it is possible to reduce the number of parameters required by PDI model by applying several constraints. But this method is not applicable to all soil textures. Comparison of the convergence rate of the two models showed that parameters of PDI model in all cases require close to 300 iterations to converge while, percolation theory requires up to 2000 iterations to converge. Therefore, the results indicate that the percolation theory with fewer number of parameters can provide more accurate and reliable estimates of  $K(\theta)$  and water retention.

**Keywords:** Percolation theory, Capillary flow, Porous space, Peters-Durner-Iden model, Capillary conductivity

1- Ph.D. Candidate of Irrigation and Drainage, Department of Water Science and Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

2- Professor, Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

3- Professor, Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

4- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Boise State University, Boise, Idaho, USA

(\* - Corresponding Author Email: [bijangh@um.ac.ir](mailto:bijangh@um.ac.ir))