

مقاله علمی-پژوهشی

## مدل‌سازی دو بعدی جریان آب زیرزمینی با استفاده از روش محلی بدون شبکه پترو-گالرکین MLPG بر پایه تابع شعاعی RBF (مطالعه موردی: دشت رفسنجان)

سمیرا زین‌الدینی میمند<sup>۱</sup>، بهاره پیرزاده<sup>۲</sup>، سید آرمان هاشمی منفرد<sup>۳</sup>، رسول معمارزاده<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۹

### چکیده

در این تحقیق، روش بدون شبکه پترو-گالرکین برای مدل‌سازی جریان آب در آبخوان دشت رفسنجان مورد استفاده قرار گرفت. از روش باقی‌مانده جزئی برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده و مدل در دو بعد اجرا شد. برای ساخت توابع شکل دامنه پشتیبانی دایره‌ای بهره‌برداری شد. این پژوهش به عنوان یک مطالعه موردی واقعی بر روی دشت رفسنجان در جنوب شرقی ایران تمرکز دارد و تاکنون هیچ مطالعه‌ای با استفاده از روش‌های بدون شبکه بر روی این دشت انجام نشده است. مدل‌های محاسباتی با استفاده از نرم‌افزار متلب و توابع پایه شعاعی به عنوان تکنیک درون‌یابی پیاده‌سازی شدند. در راستای صحت‌سنجی مدل، ابتدا مساله حرکت آب در خاک به عنوان مسئله استاندارد با استفاده از مبانی ریاضی روش بدون شبکه برای معادلات جریان مدل‌سازی شد. سپس با توجه به بررسی صحت نتایج این مدل‌سازی، به شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی در دو حالت ماندگار و غیرماندگار پرداخته شد. تجزیه و تحلیل مقایسه‌ای بین داده‌های تجربی مشاهده‌شده و مقادیر مدل‌سازی شده در دینامیک جریان، هم‌ترازی قابل‌توجهی را نشان داد. همچنین، آنالیز حساسیت نشان داد که مقدار پارامتر شکل ( $\alpha c$ ) می‌تواند بیشترین تأثیر را در دستیابی به مقدار دقیق‌تر پیش‌بینی داشته باشد. برای ارزیابی دقت پارامترهای کالیبره شده، ضریب تعیین ( $R^2=0.97$ ) محاسبه شد. این مقدار ضریب تعیین بالا نشان‌دهنده یک همبستگی قوی بین داده‌های مشاهده‌شده و مقادیر مدل‌سازی شده است، که نشان می‌دهد پارامترهای مدل در محدوده قابل قبولی قرار دارند.

**واژه‌های کلیدی:** توابع پایه شعاعی، جریان آب زیرزمینی، روش بدون شبکه محلی پتروگالرکین، محیط متخلخل

### مقدمه

آب زیرزمینی می‌توان رفتار آن را در هر مکان و زمان پیش‌بینی و مدیریت صحیح را برای آن انجام داد (Swathi and Eldho, 2014) با پیشرفت‌های سخت‌افزاری و نرم‌افزاری، مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی نیز در جهات مختلف افزایش یافت. اکثر کدها یا نرم‌افزارهای موجود برای مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی بر اساس تفاضل محدود (FDM)<sup>۵</sup> و روش‌های المان محدود (FEM)<sup>۶</sup> است. روش اجزای محدود در دهه ۱۹۵۰ مطرح شد. این روش برای حل معادلات دیفرانسیل مهندسی، روشی کارا و مناسب است. در این روش دامنه مساله با تعداد زیادی از عنصر با اشکال ساده که در نقاطی به نام گره به یکدیگر متصل شده اند نشان داده می‌شود. تقریب بدست آمده به ویژگی‌ها و تعداد عنصر بکار رفته بستگی دارد و باید تعداد عنصر بیشتری برای رسیدن به نتایج دقیق از این روش در نظر گرفته شود. ایجاد مش از اصلی‌ترین بخش‌های روش اجزای محدود است. برای دسته خاصی از مسایل، استفاده از مش‌بندی منجر به پیچیدگی‌های

پیچیدگی رفتار آب‌های زیرزمینی و کمبود آب در این بخش که با رشد جمعیت جهان و تغییرات آب و هوایی تبدیل به مسائلی با اهمیت شده، ضرورت مدیریت آن را فراهم می‌کند. بنابراین مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی امروزه به بخش عمده اکثر پروژه‌های مربوط به توسعه آب‌های زیرزمینی، حفاظت و اصلاح تبدیل شده است. با توجه به مسائل و مشکلاتی که همواره در برداشت مداوم اطلاعات این دسته از آب‌ها وجود دارد با استفاده از مدل‌سازی جریان

- ۱- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
  - ۲- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
  - ۳- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
  - ۴- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه ولیعصر رفسنجان، رفسنجان، ایران
- (\*)- نویسنده مسئول: (Email: b\_pirzadeh@eng.usb.ac.ir)

جمله روش‌های بدون شبکه است که برای مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی استفاده می‌شود. موسوی نژاد و همکاران رابطه‌سازی و کاربرد این روش را در مدل‌سازی دو بعدی رفتار دینامیکی سازه‌های استوانه‌ای با تقارن محوری و طول محدود، نشان دادند (Moussavinezhad et al., 2013). محتشمی و همکاران (۱۳۹۹) از روش MLPG و تابع شکل MLS در محاسبه بیلان آبی یک آبخوان واقعی استفاده کردند. این تحقیق در یک دوره زمانی یکساله در آبخوان دشت بیرجند انجام شد. دقت بالای این روش در مقایسه با روش تفاضل محدود و نشان دادن عدم وابستگی این روش به مش‌بندی و حذف خطاهای ناشی از آن کارایی هرچه بیشتر روش‌های بدون مش را نشان می‌دهد. در تحقیق دیگر با استفاده از روش MLPG و تابع تقریب حداقل مربعات و تابع وزن اسپیلین در مدل‌سازی جریان آبخوان دشت بیرجند استفاده کردند که با میانگین خطای نسبی و ریشه میانگین مربعات خطا که به ترتیب ۰/۰۰۰۲ و ۰/۴۸۳ نتایج رضایت بخشی را از این مدل دریافت کردند (Mohtashami et al., 2017). همچنین در مطالعات اخیر این محققان، MLPG با روش‌های آماری یا فیلتر ذرات برای تخمین سطح آب زیرزمینی در سفره‌های زیرزمینی نامحدود ترکیب شد (Mohtashami et al., 2022a,b). داس و الدهو با استفاده از دو روش (MLPG) و روش فرم ضعیف (MWS) برای شبیه‌سازی پدیده پخش و انتقال در یک محیط متخلخل استفاده کردند. آنان به این نتیجه رسیدند شکل ضعیف MLPG یک تکنیک عددی واقعاً بدون شبکه و قوی است که می‌تواند برای سیستم‌های آبخوان پیچیده با مرزهای مشتق اعمال شود (Das and Eldho, 2022). مجیدی خلیل آباد و همکاران در مطالعه به حداقل رساندن اختلاف بین سطح جریان مشاهده شده در چاه‌های پیزومتری و سطح جریان مدل‌سازی شده از دو روش MLPG و روش FDM در شبیه‌سازی دشت بیرجند استفاده کردند. با اجرای مدل در آبخوان بیرجند، موقعیت بهینه ده چاه پیزومتر در مناطقی که چگالی چاه‌های استخراج کمتر بود تعیین شد. در نهایت، RMSE هر دو روش MLPG-TLBO و FDM برای ۱۰ پیزومتر بهینه ۰,۳۳۴ متر و ۱,۴۸۳ متر به دست آمد. مقدار RMSE برای MLPG-TLBO کاهش ۰/۴۲۳ متری را نسبت به مقدار قبلی خود نشان داده است. این تفاوت، عملکرد خوب این روش را در طراحی شبکه بهینه برای آبخوان نشان می‌دهد (Majidi Khalilabad et al, 2022). صحرانورد و همکاران با هدف اجرای مدل شبیه‌سازی-بهینه‌سازی (S/O) برای تخمین پارامترهای دو آبخوان از روش بدون شبکه MLPG در شبیه‌سازی و آموزش-یادگیری اصلاح شده استفاده کردند و الگوریتم بهینه‌سازی MTLBO بعنوان مدل بهینه‌سازی استفاده شد. کاهش مقدار RMSE با استفاده از این مدل که ۰/۳۵۶ بود در مقایسه با معیار خطا روش-های MLPG و FDM با مقادیر ۰/۷۵۷ و ۱/۱۹۷، تخمین دقیقتری را

زیادی می‌گردد. استفاده از روش عناصر متناهی در مسایلی که دارای تغییر شکل زیادی در دامنه هستند، به دلیل به هم خوردن عناصر، منجر به کاهش دقت خواهد شد. بنابراین ایده روش‌های بدون مش به منظور رهایی از پیچیدگی‌های حاصل از اتصال بین گره‌ها مطرح شد تا مشکلات ناشی از وجود مش را از بین ببرد (Huerta, 2000; Prokic and Lukic, 2007; Tabarrok and Xiong, 1991). جذابیت اصلی روش‌های بدون مش در امکان بروزرسانی ساده آن‌ها است. در این روش‌ها دامنه مساله توسط مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده با توزیع دلخواه نمایش داده می‌شود که هیچگونه ارتباط و اتصال به یکدیگر ندارند. بنابراین استفاده از این روش‌ها می‌تواند برای هر مساله یا ناحیه هندسی دلخواه با توزیع گره‌ها، مناسب باشند. از جمله روش‌های بدون شبکه که روش‌های کاملاً بدون مش محسوب می‌شوند روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین (MLPG)<sup>۱</sup> و روش معادلات انتگرالی مرزی (LBIE)<sup>۲</sup> هستند که برای حل مسائل خطی و غیرخطی توسط آتلوری و زو معرفی شدند (Atluri and Zhu, 1998). اساس کار این روش‌ها استفاده از توابع شکل مانند توابع پایه شعاعی (RBF)<sup>۳</sup> و تابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS)<sup>۴</sup> هستند. توابع RBF در ابتدا برای درون‌یابی داده‌های پراکنده پیشنهاد شدند (Hardy, 1971). حل معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE)<sup>۵</sup> به روش بدون شبکه با استفاده از درونیابی چهارگانه RBF(MQ) با دامنه پشتیبانی کلی برای اولین بار توسط کانسا ارائه شد (Kansa, 1990). اما روش کانسا با توجه به تغییر شرایط و ناپایداری در اثر افزایش گره‌ها مشکلاتی را به همراه داشت. کانسا و هون چندین رویکرد برای حل این مسائل و افزایش دقت را از جمله جداسازی بلوک‌ها، پیش‌شرطی‌کننده ماتریس، متغیرهای پارامتر شکل (MQ) و غیره بکار گرفتند. این محققین نتیجه گرفتند که هر کدام از روش‌های بکار گرفته شده شرایط ماتریس سیستم و دقت حل را بهبود می‌بخشد و ترکیب تکنیک‌ها برای بدست آوردن جداول دقیق‌تر پیشنهاد دادند (Kansa and Hon, 2000). منال و الهادو روش مجموعه نقاط چندجمله‌ای (RPCM)<sup>۶</sup> و توابع پایه شعاعی چهارگانه (MQ-RBF)<sup>۷</sup> بعنوان تابع تقریبی در دو آبخوان محدود را برای شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی در محیط متخلخل در یک بعد و دوبعد توسعه دادند (Meenal and Eldho, 2011). نتیجه این مدل در مقایسه با روش تحلیلی و FEM رضایت بخش بود. روش MLPG از

- 1- Meshless local Petrov-Galerkin
- 2- Indirect Boundary Integral Equation Methods
- 3- Radial basis function
- 4- Moving least squares
- 5- Partial differential equations
- 6- Radial point collocation method
- 7- Multiquadric-RBF

$$\int_{\Omega} W \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) d\Omega \quad (5)$$

$$= \int_{\Omega} W(Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) + q$$

در این معادله  $W$  تابع وزن است. مجموع کل دامنه ( $\Omega$ ) به چندین زیردامنه برای انتگرال‌گیری تقسیم می‌شود. با استفاده از قضیه دیورژانس و انتگرال‌گیری جزبه جز معادله (۵) به صورت معادله زیردرمی‌آید.

$\Omega$  دامنه انتگرال‌گیری برای گره  $I$  است. مرزهای انتگرال‌گیری کلی ( $\Gamma_s$ ) به چهار بخش تقسیم می‌شود: مرز داخلی ( $\Gamma_{SI}$ )، مرز دریگله ( $\Gamma_{S1}$ )، مرز نویمن ( $\Gamma_{S2}$ ) و مرز رایین ( $\Gamma_{S3}$ ). اگر هیچ اشتراکی بین مرز منطقه و مرزعمومی وجود نداشته باشد  $\Gamma_{SI} = \Gamma_s$  انتگرال‌های روی  $\Gamma_{S1}, \Gamma_{S2}, \Gamma_{S3}$  صفر می‌شود. بنابراین معادله (۶) به شکل معادله (۷) درمی‌آید.

$$\int_{\Gamma} W \left( K_x n_x \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) + K_y n_y \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) d\Gamma \quad (6)$$

$$- \int_{\Omega} \left( K_x \frac{\partial W}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) + K_y \frac{\partial W}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} W(Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) + q$$

$$\int_{\Gamma_s} W \left( K_x n_x \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) + K_y n_y \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) d\Gamma \quad (7)$$

$$- \int_{\Omega} \left( K_x \frac{\partial W}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) + K_y \frac{\partial W}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} W(Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) + q$$

### توابع درون‌یابی

یکی از مهم‌ترین مسائلی که در حل روش‌های بدون شبکه تاثیرگذار است انتخاب تابع شکل مناسب بر پایه توزیع گره‌های اختیاری در داخل دامنه سازه است. یک تابع شکل مناسب کارآمدی روش بدون شبکه را افزایش می‌دهد که با استفاده از مقدار تابع در گره‌های واقع شده در دامنه تحت پوشش تعریف می‌گردد (امینی و همکاران، ۱۳۹۳). بنابراین این توابع شکل به صورت محلی پشتیبانی می‌شوند. تابع شکل خارج از دامنه محلی تعریف نمی‌شود یا به عنوان صفر در نظر گرفته می‌شود. چنین دامنه محلی، دامنه پشتیبانی یا دامنه تاثیر نامیده می‌شود (Liu and Gue, 2005). همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، دامنه  $\Omega$  تحت پوشش می‌تواند به صورت دایره، بیضی و مستطیل انتخاب شود. استفاده از چند جمله‌ای خیام-

نشان می‌دهد و نتایج حاصل از مدل MLPG-MTLBO به نتایج واقعی نزدیک‌تر بودند (Sahranavard et al., 2023).

در مطالعه حاضر، کاربرد روش MLPG بر اساس تابع تقریب RBF برای حل مساله جریان آب زیرزمینی در دشت رفسنجان توسعه داده شده است. نوآوری این تحقیق استفاده از روش بدون مش با استفاده از تابع شکل شعاعی پایه است که در یک آبخوان واقعی بکار گرفته شده است. در این روش با استفاده از دامنه پشتیبانی محلی دایره‌ای که با تغییر شعاع دایره، گره‌های بیشتری را برای ساخت توابع شکل بدون تاثیر بر بخش‌های دیگر می‌توان اضافه یا حذف کرد.

## مواد و روش‌ها

### روش بدون شبکه پترو-گالریکین MLPG

در این مطالعه برای شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی روش بدون شبکه محلی پترو-گالریکین (MLPG) بر اساس تابع تقریب RBF توسعه داده شده است. برای اعمال روش MLPG معادله جریان آب در خاک به شکل زیر در نظر گرفته شده است (Bear, 1972).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) + q \quad (1)$$

$K_x$  و  $K_y$  بترتیب ضریب نفوذپذیری در جهت افقی و عمودی می‌باشد.  $h$  سطح جریان ( $m$ )،  $S$  ضریب ذخیره ویژه،  $Q$  منبع یا سینک ( $m^3/day/m^2$ ) است،  $q$  نرخ شارژ ( $m/day$ ) است. برای تجزیه و تحلیل حالت ناپایدار معادله جریان، از شرایط اولیه معادله (۲) استفاده می‌شود:

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y); \quad x, y \in \Omega \quad (2)$$

$\Omega$  ناحیه جریان تعریف می‌شود  $h_0(x, y)$  سطح اولیه جریان در ناحیه  $\Omega$  می‌باشد. به طور کلی، شرایط مرزی دیریکله و نویمان دو نوع شرایط مرزی تعریف شده برای جریان هستند که می‌توان آن را به صورت معادله (۳) و (۴) ارائه داد:

$$h(x, y, t) = h_1(x, y, t); \quad x, y \in \partial\Omega_1 \text{ (Dirichlet BC)} \quad (3)$$

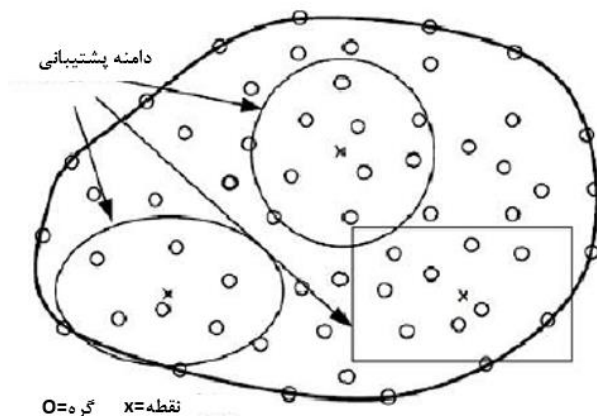
$$K \frac{\partial h}{\partial n} = q_1(x, y, t); \quad x, y \in \partial\Omega_2 \text{ (Neuman BC)} \quad (4)$$

مرز ناحیه با  $\partial\Omega_1$  نشان داده می‌شود. در معادله ۴،  $\frac{\partial}{\partial n}$  مشتق نرمال به مرز را نشان می‌دهد،  $h_1(x, y, t)$  مقدار جریان شناخته شده در مرز ( $m$ ) و  $q_1(x, y, t)$  نرخ جریان ( $m^3/day/m$ ) شناخته شده است. شکل ضعیف معادله لاپلاس در گره  $I$  با روش باقیمانده وزنی به صورت زیر بیان می‌شود.

در نقطه  $x_Q$  می‌باشد.  
 دو روش در روش درونیابی نقاط بر اساس نحوه انتخاب تابع پایه-  
 ای با بکارگیری توابع پایه متفاوت گسترش یافته است. روش درونیابی  
 نقاط از تابع‌های چند جمله‌ای و تابع‌های شعاعی برای تقریب تابع  
 میدان استفاده می‌کند (Liu and Gu, 2005). در بخش بعدی به  
 روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی پرداخته می‌شود.

پاسکال در ایجاد تابع شکل یکی از روش‌های ساده و پر کاربرد می-  
 باشد. در این روش، تقریب تابع شکل با بهره جویی از مقدار تابع  
 درگره‌های داخل دامنه ی تحت پوشش صورت می پذیرد.  
 انتخاب دامنه مناسب در افزایش دقت تقریب بسیار موثر است.  
 ابعاد دامنه پشتیبانی  $ds$  با استفاده از معادله (۸) تعیین می‌شود.  

$$d_s = \alpha_c d_c \quad (۸)$$
  
 $\alpha_c$  پارامتر بدون بعد دامنه پشتیبانی،  $d_c$  نزدیکترین فاصله گرهی



شکل ۱- دامنه‌های تحت پوشش در روش بدون شبکه (Liu and Gue., 2005)

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_m]^T \quad (۱۱)$$

$$R^T(x) = [R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)] \quad (۱۲)$$

$$P^T(x) = [P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)] \quad (۱۳)$$

پایه شعاعی تابعی بر حسب مسافت  $r_i$  می‌باشد و به صورت  
 معادله (۱۴) بیان می‌شود.

$$R_i(x) = R_i(r_i) \quad (۱۴)$$

$$r_i = ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{1/2} \quad (۱۵)$$

$P_i(x)$  چند جمله‌ای‌های پاسکال در مختصات  $x^T = [x, y]$   
 هستند. تعداد زیادی توابع پایه‌ای شعاعی وجود دارد. چهار نوع متداول  
 از این نواع در جدول ۱ ارائه شده است.

### روش درونیابی نقطه ای شعاعی

یک دامنه پشتیبانی محلی برای تقریب  $u(x)$  را می‌توان با  
 ترکیب  $n$  تابع پایه شعاعی (RBF) و توابع پایه چند جمله‌ای  $m$ ، با  
 استفاده از رابطه (۹) ساخت (Liu and Gu, 2005): ساختار درونیابی  
 $u(x)$  برای عبور از بین همه گره‌ها با استفاده از تابع پایه شعاعی  
 $R_i(x)$  تابع پایه‌ای چند جمله ای  $P_i(x)$  به صورت زیر تعریف می-  
 شوند:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x) b_j = R^T a + P^T b \quad (۹)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]^T \quad (۱۰)$$

جدول ۱- توابع پایه شعاعی با ابعاد پارامتر شکل (Wang and Liu, 2000)

پارامتر شکل	عبارت	اسم
$\alpha_c \geq 0, q$	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	چند مربعی (MQ)
$\alpha_c$	$R_i(x, y) = \exp[-\alpha_c \left(\frac{r_i^2}{d_c}\right)]$	گوسی (EXP)
$\eta$	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	اسپلاین صفحه نازک (TPS)
$\eta$	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	لگاریتمی

شود که شامل  $n$  گره است. در نهایت منجر به معادله خطی می‌شود

برای تعیین ضرایب  $a_i$  و  $b_j$  یک محمل دامنه برای  $x$  تعیین می-

ماتریس توابع شکل  $\varphi(x)$  به صورت معادله (۲۳) تعریف می-شود.

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \dots \cdot \varphi_n(x)] \quad (23)$$

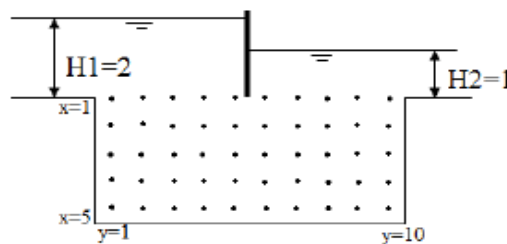
پس از گسسته سازی معادله جریان آب در خاک برای حل آن با کمک روش MLPG-RBF داده های را به نرم افزار متلب وارد کرده و برنامه مربوط به شبیه سازی جریان آب در سفره آب زیرزمینی نوشته شد. در جهت اطمینان از صحت برنامه ابتدا نشست آب در زیر بدنه برای خاک همسان در دو جهت  $x$  و  $y$  در زیر تیغه آب بند مطابق شکل ۲ در حالت دائمی بکار گرفته شد که در ادامه نتایج حاصل مدل سازی مسائله استاندارد تشریح شده است.

### رابطه سازی معادله ی جریان آب در خاک

معادله لاپلاس برای معادله حاکم بر جریان آب در خاک بیان می شود. این معادله برای خاک های غیر همسانگرد در حالت جریان پایدار به صورت رابطه (۲۴) است. این معادله گونه ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی می باشد (امینی و همکاران، ۱۳۹۳):

$$K_x \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) + K_y \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (24)$$

در اینجا  $H$  هد آب و  $K_x$  و  $K_y$  ضرایب هدایت هیدرولیکی در دو راستای  $x$  و  $y$  هستند. هدف این تحلیل، تشخیص متغیر سطح آب به عنوان تابع مکان می باشد. شکل ۲ مساله نشست آب از زیر تیغه آب بند را در دو جهت  $x$  و  $y$  در حالت دائمی نشان می دهد. برای اختلاف سطح آب ۱ متر نتایج حاصل از روش بدون شبکه پترو-گالرکین در جدول ۲ آورده شده است.



شکل ۲- شماتیک مساله نشست آب از زیر تیغه آب بند (امینی و همکاران، ۱۳۹۷)

جدول ۲- مقدار سطح جریان آب در گره ها در روش MLPG

$y \setminus x$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
X ۱	۲	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱/۹۹۰	۱/۹۸۷	۱/۹۷۵	۱/۹۳۴	۱/۷۹۱	۱/۴۶۲	۱/۲۲۶	۱/۱۴۶	۱/۱۰۰	۱/۰۸۹
۳	۱/۹۷۸	۱/۹۷۳	۱/۹۵۳	۱/۹۰۳	۱/۸۰۳	۱/۵۶۷	۱/۳۹۶	۱/۲۷۶	۱/۲۰۸	۱/۱۸۹
۴	۱/۹۶۹	۱/۹۶۴	۱/۹۴۲	۱/۸۹۳	۱/۷۹۷	۱/۶۴۳	۱/۴۸۵	۱/۳۶۴	۱/۲۸۷	۱/۲۶۵
۵	۱/۹۶۲	۱/۹۶۱	۱/۹۳۹	۱/۸۹۰	۱/۸۰۱	۱/۶۵۸	۱/۵۱۲	۱/۳۹۰	۱/۳۱۱	۱/۲۸۷

که هر کدام مربوط به یک گره است. شکل ماتریسی معادله به صورت معادله (۱۶) است.

$$U_s = R_0 a + P_m b \quad (16)$$

$U_s$  بردار مقادیر تابع است.  $R_0$  ماتریس گشتاور از توابع پایه شعاعی به صورت ماتریس معادله (۱۷) تعریف می شود:

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(x_1, y_1) & \dots & R_n(x_1, y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n, y_n) & \dots & R_n(x_n, y_n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$P_m$  ماتریس گشتاور چند جمله ای ها به صورت ماتریس زیر می باشد.

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \vdots \\ 1 & x_2 & y_2 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & \vdots \\ P_m(x_1) & P_m(x_2) & \dots & P_m(x_n) \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (18)$$

انجام درون یابی با عبور از همه  $n$  نقطه در ناحیه موثر مجموعه ای از معادلات تشکیل می شود. جمله شعاعی، چند بعد را به یک بعد تبدیل می کند و جمله چند جمله ای، دقت چند جمله ای درونیاب را بهبود می بخشد. شکل ماتریسی معادلات به صورت معادله (۱۹) است.

$$\begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

یا

$$G \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

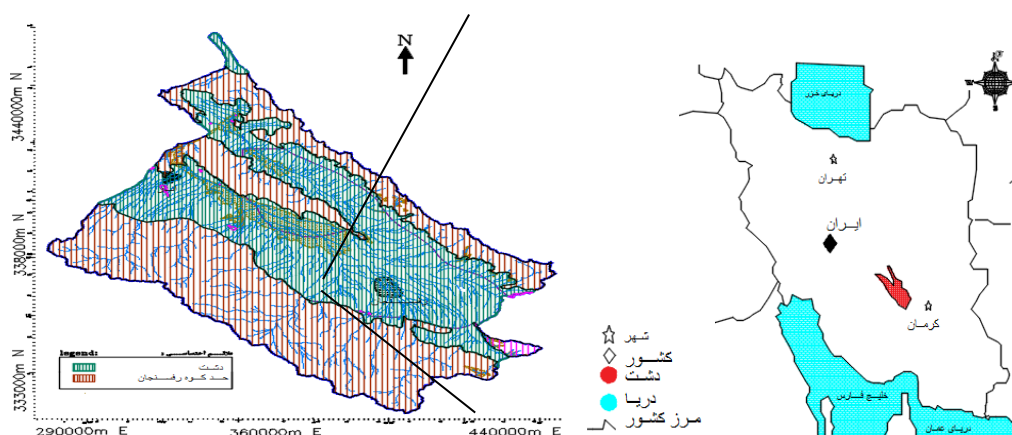
بدلیل اینکه  $R_0$  متقارن و معین مثبت است ماتریس  $G$  نیز متقارن و معین خواهد شد و دارای معکوس است. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} u^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

و درونیابی به صورت معادله (۲۲) بیان می شود.

$$u(x) = [R^T(x) P^T(x)] G^{-1} \begin{bmatrix} u^e \\ 0 \end{bmatrix} = \varphi(x) u^e \quad (22)$$

مساحت ۱۲۴۲۱ مترمربع می‌باشد (شکل ۳). دشت رفسنجان شامل سه زیرحوضه رفسنجان، نوق و دشت انار است. و دارای تابستان‌های گرم و زمستان‌های سرد و خشک می‌باشد. از آب‌های زیرزمینی آبخوان رفسنجان برای مصارف خانگی، کشاورزی و صنعتی استفاده می‌شود. سطح آب در این دشت بالا و میزان بارندگی سالانه بین ۶۰ میلی‌متر در نقاط دشت و حدود ۱۲۰ میلی‌متر در ارتفاعات است. تغذیه آبخوان تا حد زیادی به دلیل نفوذ باران و میانگین تبخیر سالانه ۳ متر در ماه‌های ژوئن تا آگوست است (Rahnama and Zamzam, 2013).



شکل ۳- موقعیت دشت رفسنجان (Rahnama and Zamzam, 2013).

مطالعه می‌باشند و مرزهای هیدرولیکی در قسمت شمالی، غربی و جنوب شرقی دشت واقع هستند و شامل خطوط جریان و خطوط هم-پتانسیل می‌باشند که از روی نقشه سطح ایستابی مشخص شده است. این مرزها از نوع مرز با شدت جریان معلوم می‌باشند (گزارشات سازمان آب منطقه ای کرمان، ۱۳۸۹).

#### اطلاعات چاه‌های مشاهده‌ای

تعیین دقیق عمق و سطح آب در چاه‌ها نقش مهمی در مدل‌سازی آب زیرزمینی و شناسایی رفتار آبخوان دارد. دشت رفسنجان تعداد ۶۶ چاه مشاهده‌ای دارد که با استفاده از اطلاعات تراز آن‌ها پارامترهای دشت کالیبره شد و سپس صحت‌سنجی شدند (Rahnama and Zamzam, 2013).

#### هدایت هیدرولیکی آبخوان

هدایت هیدرولیکی مهمترین و حساس‌ترین پارامتر در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی بشمار می‌رود. با توجه به دقتی که در تعیین

با توجه به نتایج بدست آمده در این مساله، با حرکت سیال از بالادست به پایین دست، سطح سیال در حرکت افقی به مرور کاسته شده است تا در پایین دست به سطح ۱ متر می‌رسد. با عنوان نتایج این مساله برای صحت‌سنجی برنامه مساله جریان آب در محیط متخلخل آبخوان دشت رفسنجان با استفاده از روش MLPG-RBF حل و نتایج آن در ادامه خواهد آمد.

#### منطقه مورد مطالعه

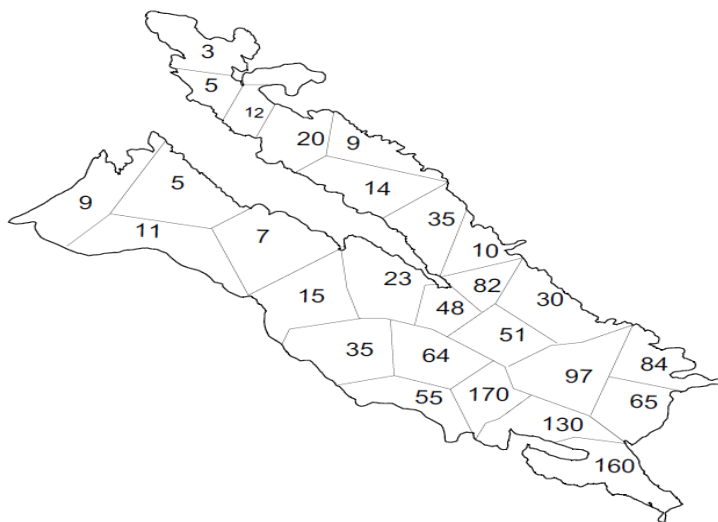
منطقه مورد مطالعه این تحقیق دشت رفسنجان با طول جغرافیایی ۵۴ تا ۵۶°۳۴ عرض جغرافیایی ۲۹°۵۱ تا ۳۱°۳۱ است. این دشت زیرحوضه‌ای از دشت کرمان واقع در جنوب شرقی ایران با

از نظر زمین‌شناسی این دشت جداکننده دو واحد زمین‌شناسی مهم ایران از هم می‌باشد. بدین ترتیب که رشته کوه‌های جنوب غرب که عمدتاً از جنس سنگ‌های آواری-آتشفشانی می‌باشند و به ناحیه ارومیه تعلق دارند و جنس آن‌ها عمدتاً آتوسن است برعکس، رشته-کوه‌های شمال غرب دشت به ایران مرکزی تعلق داشته و از سنگ‌های رسوبی پرکامبرین تا نئوژن تشکیل یافته‌اند. در اثر فرسایش کوهستان‌های سرچشمه (در جنوب) و داوران (در شمال) و ورود رسوبات همراه سیلاب‌ها به این دشت، در شمال و جنوب آن مخروط افکنه‌ها شکل گرفته‌اند (گزارشات سازمان آب منطقه ای کرمان، ۱۳۸۹).

#### شرایط مرزی

شرایط مرزی به دو دسته مرزهای فیزیکی و مرزهای هیدرولیکی تقسیم می‌شوند. مرزهای فیزیکی آبخوان دشت رفسنجان در حد بین دو کوه و دشت که با استفاده از نقشه‌های توپوگرافی، زمین‌شناسی و منابع آب مشخص گردید، واقع شده‌اند. این مرزها از نوع مرز با شدت جریان معلوم می‌باشند که در شمال شرقی و جنوب غربی محدوده مورد

هدایت هیدرولیکی بر اساس مطالعات گذشته بر که بر روی دشت رفسنجان انجام شده در نظر گرفته شد. سپس با استفاده از روش سعی و خطا در طی مدل‌سازی دشت این مقادیر کالیبره شدند. دامنه تغییرات این پارامتر که بعنوان مقادیر اولیه در نظر گرفته شد بین ۳/۶ تا ۱۸۰ متر بر روز بود. مقادیر هدایت هیدرولیکی در هر چند ضلعی در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴- تیسین بندی هدایت هیدرولیکی آبخوان

مقدار این پارامتر آبخوان بکار می‌رود پاسخی که از مدل دریافت می‌شود نیز به همان نسبت دقیق خواهد بود. آزمایش پمپاژ از جمله روش‌هایی است که در بدست آوردن مقدار هدایت هیدرولیکی بسیار کمک می‌کند اما با توجه به آزمایش‌های کمی که در این دشت انجام شده، هدایت هیدرولیکی در ضمن کالیبراسیون مدل در شرایط ماندگار تخمین زده شده است. به منظور تقریب مقادیر هدایت هیدرولیکی و ورود اطلاعات به نقاط گرهی این آبخوان مقادیر اولیه

### توسعه مدل جریان

پس از ساخت هندسه آبخوان و پخش نقاط گرهی، با ورود اطلاعات اولیه مدل برای حالت ماندگار برای یکسال ابی ۱۳۸۹-۱۳۹۰ اجرا شد. در شبیه‌سازی مدل جریان، نقاط مرزی اطراف آبخوان شامل مرزهای جنوب شرقی و شمال غربی هستند. مقدار جریان در این بخش ثابت و مرزهای شمال شرقی و جنوب غربی بدون جریان هستند. شکل ۶ گره‌هایی را که مقادیر جریان در آن‌ها ثابت هستند نشان می‌دهد. در شکل ۷ موقعیت ۶۶ چاه مشاهده‌ای که با نماد مربع مشخص شده نشان داده شده است. تعداد ۴۶ چاه برای کالیبراسیون مدل و از اطلاعات ۲۰ چاه باقی‌مانده جهت صحت سنجی مدل استفاده شد. مقادیر هدایت هیدرولیکی اولیه در چاه‌های مشاهده‌ای از مطالعات قبلی به دست آمده است (Rahnama and Zamzam., 2013). نتایج کالیبراسیون مدل بر اساس مقایسه سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و محاسبه شده با استفاده از ضریب تعیین  $R^2$  با استفاده از معادله ۲۵ بدست می‌آید.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (h_0 - h_c)^2}{\sum_{i=1}^N (h_0 - \bar{h}_c)^2} \quad (25)$$

$h_0$  مقدار جریان مشاهداتی (m)،  $h_c$  سطح جریان محاسبه شده توسط مدل (m) و N تعداد کل داده‌های مشاهداتی است. مقدار  $R^2$

### مقادیر تخلیه و تغذیه

تغذیه سطحی براساس جمع لایه‌هایی در مدل اعمال شده که متشکل از مقادیر نفوذ از بارندگی و آب برگشتی حاصل از پمپاژ چاه-های بهره‌برداری می‌باشد. نفوذ از بارندگی با استفاده از ایستگاه‌های باران‌سنجی و هواشناسی محاسبه می‌گردد. میزان آب برگشتی را معادل ۲۰ درصد مجموع آب برداشتی محاسبه و با بقیه مقادیر تغذیه جمع می‌شود. طبق آمار سال ۱۳۹۱ در محدوده آبخوان این دشت ۱۴۹۵ حلقه چاه عمیق و نیمه عمیق وجود دارد که با توجه به دوره تنش در مدل‌سازی، میزان تخلیه این چاه‌ها بر اساس اطلاعات موجود در تمامی دوره‌های تنش محاسبه و از طریق لایه چاه در مدل اعمال می‌شود (گزارشات سازمان آب منطقه‌ای کرمان، ۱۳۸۹).

### نتایج

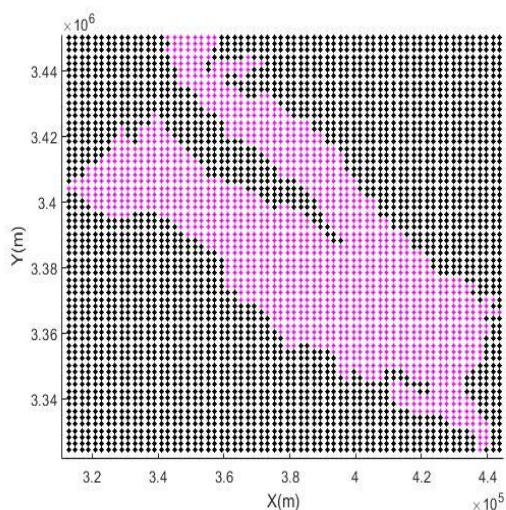
مدل‌سازی هندسه آبخوان دشت رفسنجان با استفاده از توزیع یکنواخت گره‌ها در سطح آبخوان و با استفاده از ۱۷۶۸ گره که در فاصله‌های افقی و عمودی ثابت ( $\Delta x = \Delta y = 2000$ ) در محیط متلب پیاده‌سازی گردید (شکل ۵). همچنین در راستای شبیه‌سازی معادلات جریان روش MLPG-RBF در دو بعدی به کار گرفته شده است.

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^N (h_0 - h_c)}{N} \quad (26)$$

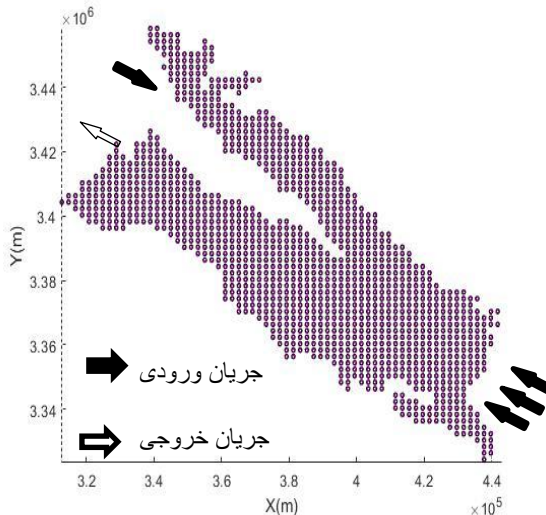
$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^N |h_0 - h_c|}{N} \quad (27)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h_m - h_s)^2} \quad (28)$$

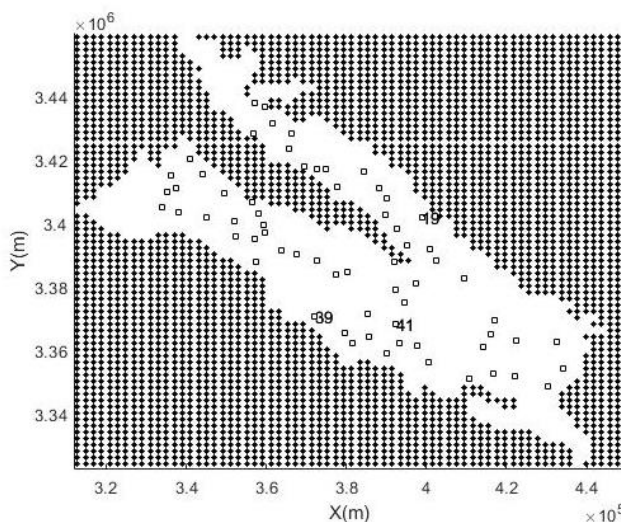
برای سطوح آبیاری زمینی کالیبره شده از مدل در برابر مقادیر مشاهداتی اولیه در سال ۱۳۸۹، ۰/۹۷ بدست آمد (شکل ۸). همچنین نتایج مقایسه‌ای موجود در شکل ۹ حد بسیار خوبی از کالیبراسیون پارامترها را در این مدل سازی نشان می‌دهد. میانگین خطا (ME)، میانگین خطای مطلق (MAE) و ریشه میانگین مربع خطا (RMSE) سه معیار خطای رایج هستند. این شاخص‌ها خطا را در واحدها نشان می‌دهند و بر اساس معادلات (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) محاسبه می‌شوند.



شکل ۵- توزیع نقاط گره‌ای آبخوان در متلب



شکل ۶- مسیر جریان ورودی و خروجی به آبخوان



شکل ۷- موقعیت چاه‌های مشاهداتی در دشت رفسنجان

این پارامترها، مساله در حالت ناماندگار و برای دوره زمانی ۶ ماهه اجرا شد. شکل ۱۱ فلوچارت عملکرد مدل MLPG-RBF را برای حالت ناماندگار نشان می‌دهد.

پیش بینی سطح آب در حالت ناماندگار با استفاده از معادله ۱ نیاز به کالیبراسیون ضریب آبدهی ویژه (Sy) با دامنه تغییرات ۰/۰۰۱ تا

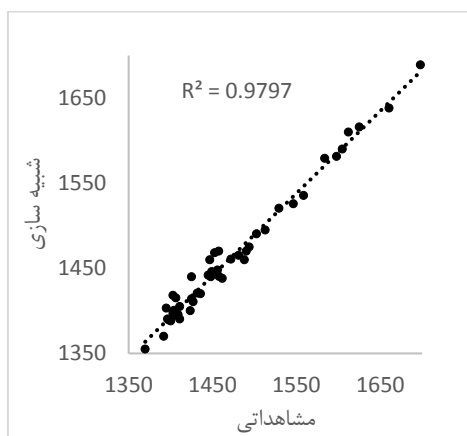
مقادیر شاخص ME و MAE برای مدل MLPG-RBF به ترتیب ۱/۴۵ و ۱/۵۸ است. در این شاخص‌ها، RMSE معیار خطای اصلی است که عملکرد مناسب‌تر مدل را نشان می‌دهد. این معیار برای مدل MLPG، ۱/۹۵ محاسبه شده است. پس از اجرای مدل برای حالت ماندگار و کالیبراسیون پارامترهای مدل و صحت سنجی

شبکه MLPG-RBF برای تعیین مقادیر بهینه آزمایش شدند. از جمله این پارامترها پارامترهای شکل، اندازه دامنه پشتیبانی محلی می‌باشند (Meenal and Eldho 2011). انتخاب مناسب اندازه دامنه پشتیبانی که یک پارامتر بدون بعد و نامعین است و با  $\alpha_c$  تعریف می‌شود نقش مهمی در میزان دقت نتایج این مساله دارد (معادله ۸). همچنین یک بررسی عددی برای ارزیابی حساسیت مقادیر ds در مطالعه میدانی دو بعدی انجام گرفت. با بررسی مقادیر مختلف پارامتر  $\alpha_c$  و ثابت بودن فواصل گرهی (dc) مشخص شد که بیشترین حساسیت در جواب مدل مربوط به پارامتر  $\alpha_c$  است. سینگ و همکارانش با حفظ dc به شکل ثابت و تغییر پارامتر شکل  $\alpha_c$  در محدوده ۳ تا ۷ برابر به نتایج بسیار دقیقی دست یافتند (Sing et al, 2016). مدل حاضر برای چندین مقدار  $\alpha_c$  اجرا شد. قابل ذکر است که مدل در مقدار  $\alpha_c=6$  همبستگی زیادی بین داده‌های میدانی مشاهده شده و داده‌های محاسبه شده را نشان می‌دهد (شکل ۱۳).

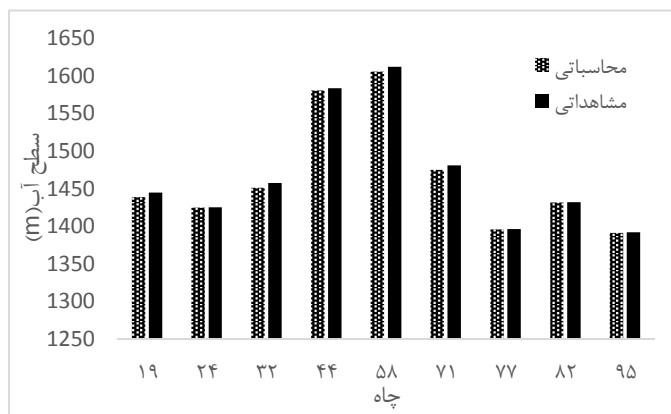
۰/۵ (ابراهیمی، ۱۳۹۹) دارد. شکل ۱۲ (الف)، (ب) و (ج) مقادیر سطح جریان محاسبه شده و مشاهده شده از چاه‌های ۱۹، ۳۹ و ۴۷ را در یک دوره شش ماهه مقایسه می‌کند. این مقایسه دقت مدل MLPG را در شبیه‌سازی دینامیک آب‌های زیرزمینی و دقت مدل برای پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی را تأیید می‌نماید، که منعکس کننده قابلیت اطمینان آن برای پیش‌بینی روندهای آینده در آبخوان است. مقایسه نتایج سطح جریان مدل‌سازی شده و مشاهداتی برای حالت غیرماندگار در جدول ۳ زمینه را برای درک عمیق‌تر رفتار آبخوان در یک دوره طولانی‌تر فراهم می‌کند. علاوه بر این، این ظرفیت پیش‌بینی به تصمیم‌گیری آگاهانه در مورد مدیریت آب‌های زیرزمینی و در نتیجه به برنامه‌ریزی منابع مؤثر و استراتژی‌های حفاظت کمک می‌کند.

### آنالیز حساسیت

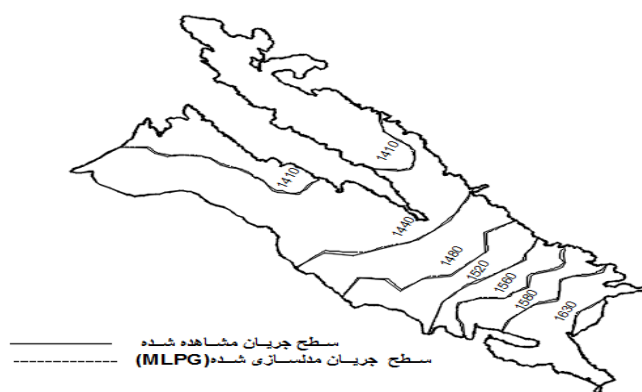
در این تحقیق میزان حساسیت پارامترهای مدل بدون



شکل ۸- برازش مقادیر محاسبه شده و مشاهده شده مقادیر جریان



شکل ۹- مقایسه سطح آب زیرزمینی مشاهداتی و محاسبه شده در حالت ماندگار



شکل ۱۰- کالیبراسیون مدل-توزیع جریان

بندی تاکنون بسیار رایج بوده است اما انعطاف پذیری کم این روش‌ها و مشکلاتی که در مش‌بندی این روش‌ها وجود دارد باعث شده است

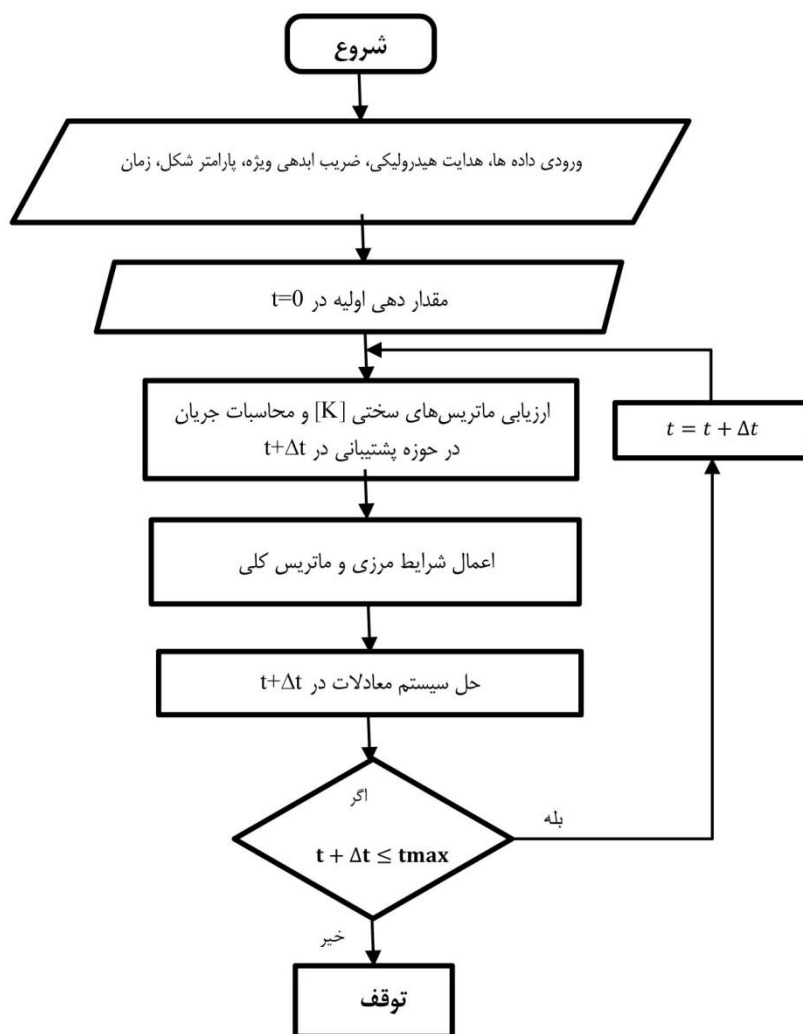
### بحث

حل مسائل هیدرولوژی با استفاده از روش‌های مبتنی بر مش

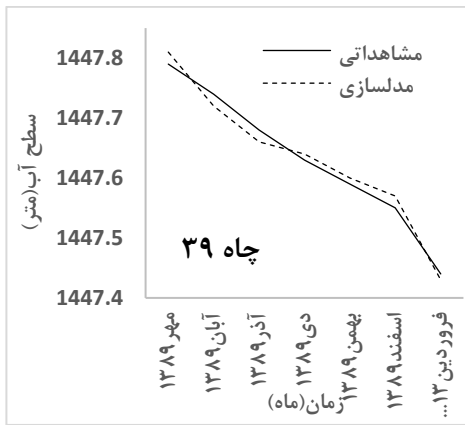
دقت مدل حاضر همانطور که نتایج در جدول ۳ ارائه شده تا حد بسیار بالایی مورد قبول است. نمایش توزیع سطح جریان هیدرولیکی در دو حالت شبیه‌سازی شده و مشاهداتی در سراسر حوزه مدل‌سازی شده نتیجه نمایشی دقیق و واقعی از این مدل را نشان می‌دهد. باتکیه بر نتایج ارائه شده در حالت ماندگار، مدل یک گام جلو رفت و وارد پیش‌بینی در حالت ناماندگار شد. در این بخش نیز مدل همبستگی خوبی را بین جریان پیش‌بینی شده و مشاهده‌شده در طول شش ماه ارائه می‌کند که به در شکل ۱۲ (الف)، (ب) و (ج) نشان داده شده است. این همبستگی قوی، با ضریب تعیین ۰٫۹۷، مشخص می‌شود و نشان دهنده استحکام مدل در موقعیت‌های دینامیکی است و درک جامعی از پیشرفت مدل‌سازی های محیط آب های زیرزمینی در طول زمان ارائه می‌دهد.

تا روش‌های بدون شبکه بدلیل سهولت و اجرا در زمان کم در شبیه‌سازی مسائل و به‌ویژه درنمایش ویژگی‌های پیچیده آبخوان بسیار اهمیت یابد. نحوه توزیع گره‌ها در این روش‌ها نقش محوری در پیش‌بینی متغیر میدان دارد. از اینرو در این تحقیق برای پیش‌بینی سطح جریان هیدرولیکی آب زیرزمینی دشت رفسنجان از روش بدون شبکه محلی پتروف گالرکین با توابع پایه شعاعی (MLPG-RBF) استفاده شد و توزیع گره‌ها در هندسه آبخوان که بخش مهم این روش است با استفاده از نرم افزار متلب انجام پذیرفت (شکل ۵).

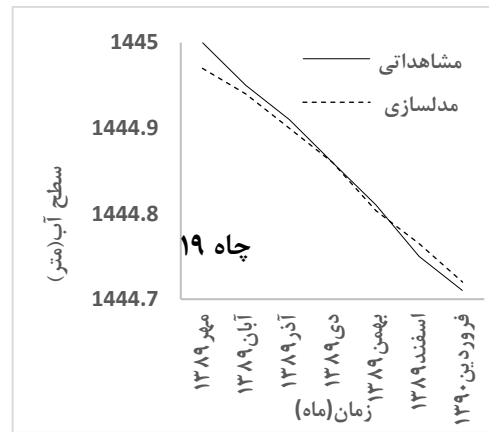
شبیه‌سازی مدل با هدف پیش‌بینی سطح جریان آب زیرزمینی آبخوان رفسنجان در حالت ماندگار است که در معادله (۱) براساس این شبیه‌سازی فرمول‌بندی شده است. مقایسه بین مقادیر سطح جریان محاسبه شده و اندازه گیری شده در میدان، نشان می‌دهد که



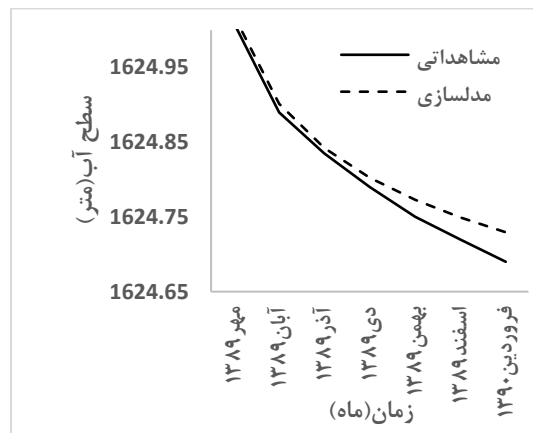
شکل ۱۱- فلوچارت مدل جریان آب زیرزمینی



(ب)

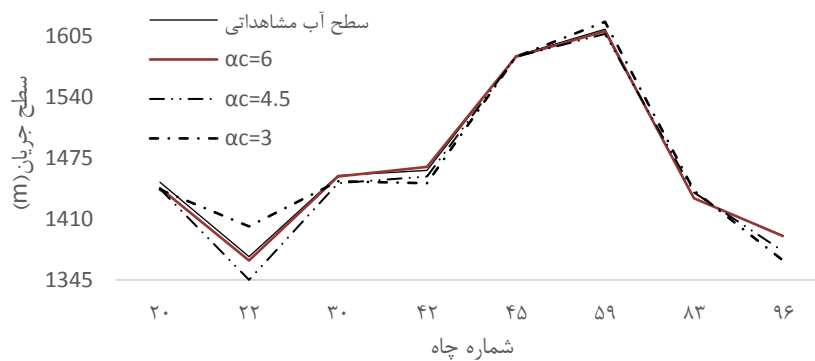


(الف)



(ج)

شکل ۱۲- مقایسه هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی در پایان دوره شبیه‌سازی (سال ۱۳۹۰) (الف) چاه ۱۹ (ب) چاه ۳۹ (ج) چاه ۴۷



شکل ۱۳- اختلاف بین مقادیر سطح جریان مشاهده شده و شبیه‌سازی شده در سه پارامتر شکل ( $\alpha_c=3$  و  $\alpha_c=4/5$  و  $\alpha_c=6$ )

جدول ۳- مقایسه روش MLPG-MK و داده‌های مشاهده شده در دوره شبیه سازی ( $\Delta t=3$ )

مختصات چاه		MLPG-RBF(m) ( $\Delta t=3$ )	سطح آب مشاهداتی (m)	مختصات چاه		MLPG-RBF(m) ( $\Delta t=3$ )	سطح آب مشاهداتی (m)
x	y			x	y		
۳۹۴۹۸۳	۳۳۹۲۸۹۰	۱۴۰۶/۰۸	۱۴۰۵/۶۰	۳۹۴۳۸۱	۳۳۷۵۱۷۵	۱۴۵۱	۱۴۴۸
۳۷۲۰۶۷	۳۳۷۰۷۰۷	۱۴۵۴/۵۴	۱۴۵۳/۸۰	۳۸۰۳۴۸	۳۳۸۴۵۰۹	۱۴۳۵	۱۴۳۰/۵
۴۲۲۵۰۵	۳۳۶۳۰۴۶	۱۵۹۶/۵۰	۱۵۹۶/۰۴	۳۷۲۰۶۷	۳۳۷۰۷۰۷	۱۴۶۵	۱۴۵۹
۴۳۲۵۰۹	۳۳۶۲۸۱۹	۱۶۰۹/۰۰	۱۶۰۸/۳۲	۳۷۷۳۵۹	۳۳۸۴۰۴۰	۱۴۱۵	۱۴۲۳
۳۶۷۶۲۴	۳۳۹۰۲۱۹	۱۴۰۶/۰۵	۱۴۰۶/۹۰	۳۸۵۲۵۳	۳۳۷۱۳۹۴	۱۴۵۶	۱۴۵۴
۳۴۴۹۷۶	۳۴۰۱۷۶۸	۱۴۳۱/۸۳	۱۴۳۰/۰۲	۳۸۱۴۳۶	۳۳۶۳۳۷۰	۱۵۱۳	۱۵۱۴/۵
۳۴۴۱۴۳	۳۴۱۵۴۴۹	۱۳۹۱/۶۸	۱۳۹۱/۳۰	۳۷۹۴۷۶	۳۳۶۵۴۱۱	۱۴۸۵	۱۴۹۰
۳۹۱۸۲۹	۳۳۸۷۸۳۶	۱۴۲۱/۸۸	۱۴۲۳/۸۸	۳۸۵۵۸۰	۳۳۶۴۱۹۱	۱۴۶۵	۱۴۷۰
۳۹۷۲۸۶	۳۳۸۱۲۲۳	۱۴۵۵/۹۵	۱۴۵۴/۷۶	۳۹۲۳۷۱	۳۳۶۸۳۴۰	۱۴۶۰	۱۴۶۱/۵
۳۵۷۴۳۸	۳۳۸۷۷۶۰	۱۴۷۸/۱۹	۱۴۷۸/۳۰	۳۹۰۰۲۴	۳۳۵۹۳۱۹	۱۴۹۸	۱۴۹۰/۳
۳۹۸۷۹۷	۳۴۰۱۹۷۴	۵/۱۴۴۳	۱۴۴۵	۳۹۳۱۴۶	۳۳۶۲۵۰۹	۱۴۸۲	۱۴۸۶/۵
۳۹۴۹۸۳	۳۳۹۲۸۹۰	۶/۱۴۰۷	۱۴۰۹	۴۰۰۴۹۴	۳۳۵۶۴۵۶	۱۵۷۹/۲	۱۵۸۳
۳۸۹۷۹۱	۳۴۰۲۶۱۹	۱۳۶۸	۱۳۶۹/۷۵	۴۱۰۶۳۹	۳۳۵۱۲۷۸	۱۵۹۴	۱۶۰۴
۴۰۰۹۶۱	۳۳۹۱۸۶۳	۱۴۴۵/۹	۱۴۴۹	۴۲۲۵۰۵	۳۳۶۳۰۴۶	۱۵۸۱	۱۵۸۷
۴۰۲۳۸۷	۳۳۸۸۱۴۰	۱۴۵۶/۴۶	۱۴۵۷/۷۶	۴۱۶۵۳۰	۳۳۵۲۶۲۷	۱۴۱۸/۸	۱۶۲۵
۳۹۱۸۲۹	۳۳۸۷۸۳۶	۱۴۲۱	۱۴۲۵	۴۱۶۱۳۱	۳۳۶۵۱۵۰	۱۵۵۳	۱۵۵۸
۳۷۲۴۹۹	۳۳۸۲۶۲۰	۱۴۰۰	۱۴۰۴	۴۳۴۱۲۴	۳۳۵۴۲۲۰	۱۶۵۸	۱۶۶۰
۴۱۶۸۷۸	۳۳۶۴۱۴	۱۵۲۶/۵	۱۵۲۵/۷	۴۳۲۵۰۹	۳۳۶۲۸۱۹	۱۶۱۰	۱۶۱۲
۴۰۹۳۵۴	۳۳۸۲۶۳۰	۱۵۲۰/۷	۱۵۲۳/۱۶	۴۳۰۲۳۸	۳۳۴۸۷۸۹	۱۶۸۹	۱۶۹۷
۳۹۷۲۸۶	۳۳۸۱۲۲۳	۱۴۵۰	۱۴۵۲	۴۵۱۹۳۸	۳۴۰۰۵۶۱	۱۴۰۵	۱۴۱۱
۳۵۲۲۹۹	۳۳۹۵۹۱۵	۱۴۲۵	۱۴۳۰	۴۵۷۴۳۸	۳۳۸۷۷۶۰	۱۴۷۵	۱۴۸۱
۳۵۶۵۱۳	۳۴۰۶۳۷۶	۱۳۹۰/۴	۱۳۹۶	۴۵۹۲۹۷	۳۳۹۹۵۴۹	۱۴۰۰	۱۴۰۵
۳۳۷۹۵۶	۳۴۰۳۵۱۷	۱۴۴۵	۱۴۴۷	۴۵۹۵۵۶	۳۳۹۶۹۳۰	۱۴۰۹	۱۴۰۲
۳۳۳۸۶۳	۳۴۰۴۷۷۵	۱۴۷۵	۱۴۸۲	۴۶۷۶۲۴	۳۳۹۰۲۱۹	۱۴۱۵	۱۴۰۶
۳۳۷۳۶۴	۳۴۱۱۰۸۰	۱۴۰۵	۱۴۱۱	۴۵۷۲۳۴	۳۳۹۴۸۱۸	۱۳۹۸	۱۴۰۷
۳۴۰۸۷۳	۳۴۲۰۲۵۵۸	۱۳۸۹	۱۳۹۸	۴۵۲۲۹۹	۳۳۹۵۹۱۵	۱۴۲۰/۷	۱۴۲۷
۳۴۹۴۱۶	۳۴۰۹۲۱۵	۱۴۰۳/۲	۱۴۰۴	۴۵۶۵۱۳	۳۴۰۶۳۷۶	۱۳۹۰/۲	۱۳۹۶
۳۴۴۱۴۳	۳۴۱۵۴۴۹	۱۳۸۹	۱۳۹۲	۴۴۴۹۷۶	۳۴۰۱۷۶۸	۱۴۲۵/۸	۱۴۳۱
۳۳۶۱۱۴	۳۴۱۴۹۷۳	۱۳۸۸	۱۴۰۰	۳۳۵۲۰۱	۳۴۰۹۵۸۶	۱۴۳۰	۱۴۳۵

### نتیجه گیری

شکل حوزه پشتیبانی محلی یکی از جنبه های مهم در روش بدون شبکه است و دقت و قابلیت اطمینان مدل ارتباط نزدیکی با این پارامترها دارد و در کیفیت خروجی مدل موثر است. تحلیل حساسیت پارامترهای مدل و مقادیر RMSE و خطای به دست آمده برای اجرای مختلف مدل نشان داد که پارامتر بدون بعد دامنه پشتیبانی ( $\alpha_c$ ) (معادله ۸) بیشترین تاثیر را در جواب مساله دارد. که در حل مساله سطح جریان آب زیرزمینی مقدار  $\alpha_c=6$  بهترین مقدار پارامتر برای نزدیکترین جواب مدل است. با این حال، این مطالعه نشان می دهد که با بررسی دقیق و انتخاب پارامترهای شکل، تابع شکل MQ-RBF

این مطالعه از روش MLPG-RBF در دشت رفسنجان که به دلیل تغییرات آب و هوایی و محیطی دشت و همچنین برداشت بی-رویه کشاورزان بسیار آسیب پذیر است به عنوان یک مورد واقعی استفاده کرد. همسویی استثنایی بین نتایج حاصل از مدل سازی روش بدون شبکه و مشاهدات واقعی جمع آوری شده توسط سازمان آب منطقه ای کرمان با ضریب تعیین  $R^2=0/97$  اثر بخشی مدل را در استفاده از روش های بدون مش در جهت شبیه سازی جریان آب زیرزمینی نشان می دهد. انتخاب پارامترهای بهینه حاکم بر اندازه و

- Computational Mechanics. 22 (2): 117-127.
- Bear, J. 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. Elsevier, New York
- Das, S. and Eldho, T.I. 2022. Simulation of reactive transport in porous media using Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) and combination of Meshless Weak and Strong (MWS) form methods. Journal of Contaminant Hydrology. 251: p.104104.
- Hardy, R.L. 1971. multi-quadric equations of topography and other irregular surfaces. Journal of Geophysical Research. 76: 1905-15.
- Huerta, A., and Fernandez-Mendez, S. 2000. Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods. Int. J. Numer. Methods Engrg. 48: 1615-1636.
- Kansa, E.J. 1990. Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. Computers & mathematics with applications. 19(8-9). pp.147-161.
- Kansa. R., Hon, Y.C., 2000. Circumventing the ill-conditioning problem with multi-quadric radial basis functions. Comput Math App 1;39:123-137.
- Liu, G.R. and Gu, Y.T. 2005. An introduction to mesh-free methods and their programming. Springer Science & Business Media.
- Majidi Khalilabad, N., Mohtashami, A., Khorashadizadeh, M. and Akbarpour, A. 2022. Monitoring network design with MLPG-TLBO hybrid model (case study Birjand, Iran). Applied Water Science. 12(6): 117.
- Meenal, M. and Eldho T.I. 2011. Simulation of groundwater flow in unconfined aquifer using meshfree point collocation method. Engineering Analysis with Boundary Elements 35(4): 700-707. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.12.003>
- Mohtashami, A., Hashemi Monfared, S.A., Azizyan, G.R. and Akbarpour, A. 2022a. Application of Meshless local Petrov-Galerkin approach for steady state groundwater flow modelling. Water Supply 22(4): 3824-3841. <https://doi.org/10.2166/ws.2022.015>
- Mohtashami, A., Hashemi Monfared SA, Azizyan, GR. and Akbarpour A. 2022b. Numerical simulation of groundwater in an unconfined aquifer with a novel hybrid model (case study: Birjand Aquifer, Iran). Journal of Hydroinformatics 24(1): 160-178. <https://doi.org/10.2166/hydro.2021.113>
- Mohtashami, A., Akbarpour, A. and Mollazadeh, M. 2017. Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin. Modares Mechanical Engineering. 17(2): دقت بالایی ارائه می‌دهد که و می‌توان به طور قابل اعتماد برای درونبایی‌ها و افزایش دقت نتایج استفاده شود. علاوه بر این، نتایج این مطالعه بر اثربخشی و کارایی روش پتروف-گالرکین محلی بدون مش با توابع پایه شعاعی (MLPG-RBF) تأکید می‌کند. این روش به عنوان یک استراتژی قوی کارآمد برای پردازش و حل مسائل پیچیده عددی مربوط به جریان آب زیرزمینی معرفی شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل‌سازی این فرآیندهای پیچیده در افزایش درک ما از رفتار آب‌های زیرزمینی قابل دستیابی و ضروری است.
- علاوه بر این، این مطالعه گامی برای درک و مدیریت موثر منابع آب زیرزمینی ارائه می‌کند. این تحقیق پتانسیل روش‌های بدون شبکه را تقویت می‌کند و استحکام MLPG-RBF را در پرداختن به پیچیدگی‌های عددی در شبیه‌سازی جریان آب نشان می‌دهد. این مطالعه نه تنها مبنای مناسبی برای تحقیقات آینده در این حوزه فراهم می‌کند، بلکه بر اهمیت انتخاب دقیق و تنظیم دقیق پارامترها در چنین چارچوب‌های مدل‌سازی تأکید می‌کند و می‌تواند به عنوان مرجعی برای پروژه‌های مشابه در دیگر مناطق با شرایط آب و هوایی و محیطی متفاوت نیز استفاده شود. توصیه می‌شود در تحقیقات آینده، از داده‌های طولانی‌مدت‌تری برای بررسی پایداری و قابلیت تعمیم مدل استفاده شود. همچنین، گسترش مدل به شبیه‌سازی سه‌بعدی می‌تواند دقت و کاربردی‌تری آن را در مسائل پیچیده‌تر افزایش دهد.
- ### منابع
- ابراهیمی فرد، ف. ۱۳۹۸. مدیریت بهینه‌سازی برداشت آب زیرزمینی با استفاده از شبیه‌سازی عددی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشکده فنی مهندسی دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- امینی، ا.، اکبری ماکویی، م. و موسوی نژاد، س.م. ۱۳۹۷. مدل‌سازی جریان سیال با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی. نشریه هیدرولیک ۱۳(۳): ۹۵-۱۰۶.
- امینی، ر.، مقصودی، ر.، و ظریف مقدم و صفت، ن. ۱۳۹۳. استفاده از روش ایزوژئومتریک در مدل‌سازی شکست سد با دیدگاه لاگرانژی. مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، ۴(۳): ۴۵-۵۵.
- سازمان آب منطقه‌ای کرمان. ۱۳۸۹. گزارشات تلفیق مطالعات منابع آب (حوزه آبریز کویرهای درانجیر-ساغند).
- محتشمی، ع.، هاشمی منفرد، س.آ.، عزیزیان، غ.ر.، اکبرپور، آ. ۱۳۹۹. محاسبه بیلان آب زیرزمینی به کمک روش عددی MLPG (مطالعه موردی: آبخوان آزاد بیرجند). نشریه آبیاری و زهکشی ایران ۱۴(۴): ۱۴۷۴-۱۴۶۰.
- Atluri, S. and Zhu, T.A. 1998 A new Meshless method (MLPG) approach in computational mechanics.

- Singh, L.G., Eldho, T.I., Kumar, A.V. 2016. Coupled groundwater flow and contaminant transport simulation in a confined aquifer using mesh-free radial point collocation method (RPCM). *Engineering Analysis with Boundary Elements* 66: 20-33. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.001>
- Swathi, B. and Eldho, T I. 2014. Groundwater flow simulation in unconfined aquifers using meshless local Petrov-Galerkin method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 48: 43-52.
- Tabarrok, B., Xiong, Y. 1991. Finite element formulations that include particular solutions of governing equations, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 31, 777-787.
- Wang, J.G. and Liu, G.R. 2000. Radial point interpolation method for elastoplastic problems. *Proc. of the 1st Int. Conf. On Structural Stability and Dynamics*, Dec. 7-9, Taipei, Taiwan. 703-708.
- 393-403.
- Moussavinezhad, S., Shahabian, F., and Hosseini, S. M. 2013. Two-dimensional elastic wave propagation analysis in finite length FG thick hollow cylinders with 2D nonlinear grading patterns using MLPG method. *CMES Comput. Model. Engineering. Science*. 91: 177-204.
- Prokic, A., and Lukic, D. 2007. Dynamic behavior of braced thin-walled beams. *International Applied Mechanics*, Vol.43, pp. 1290-1303.
- Rahnama, M.B. and Zamzam A. 2013. Quantitative and qualitative simulation of groundwater by mathematical models in Rafsanjan aquifer using MODFLOW and MT3DMS. *Arabian Journal of Geosciences*. Mar. 6(3): 901-12.
- Sahranavard, H., Mohtashami, A., Mohtashami, E. and Akbarpour, A. 2023. Inverse modeling application for aquifer parameters estimation using a precise simulation-optimization model. *Applied Water Science*. 13(2): 58.

## Two-Dimensional Modeling of Groundwater Flow Using a Meshless Local Petrov-Galerkin Method Based on RBF Radial Function (Case study: Rafsanjan Plain)

S. Zeinaddini Meimand<sup>1</sup>, B. Pirzadeh<sup>2</sup>, A. Hashemi Monfared<sup>3</sup>, R. Memarzadeh<sup>4</sup>

Recived: Jul.17, 2024

Accepted: Dec. 04, 2024

### Abstract

In this investigation, the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method is used to model flow in the porous media of Rafsanjan plain. The discretization of the governing equations was done using the partial residual method and the radial basis function, and the model was implemented in two dimensions. A circular support domain was used for shape functions. The research focuses on the Rafsanjan Plain in southeastern Iran as a real case study, where no studies of meshless methods have been done. Computational models were implemented using MATLAB, integrating Radial Basis Functions (RBF) as the interpolation technique. The comparative analysis between observed experimental data and modeled values in flow dynamics showed a significant alignment. The sensitivity analysis of the parameters showed that the value of the shape parameter ( $\alpha c$ ) can have the greatest effect in achieving a more accurate prediction value. The accuracy of the calibrated parameters was evaluated by the coefficient of determination ( $R^2=0.97$ ). The high coefficient of determination shows a strong correlation between the observed and simulated data, which indicates that the model parameters are within an acceptable range.

**Keywords:** Groundwater flow, Meshless Local Petrov-Galerkin, Porous media, Radial Basis Functions

1- PhD student, Civil Engineering Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

2- Associate Professor, Civil Engineering Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

3- Associate Professor, Civil Engineering Department, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

4- Assistant Professor, Civil Engineering Department, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

(\*-Corresponding Author Email: b\_pirzadeh@eng.usb.ac.ir)