

توسعه مدل دوبعدی جریان آب زیرزمینی با استفاده از روش ایزوژئومتریک در آبخوان آزاد

مهدیه کلانتری^۱، ابوالفضل اکبرپور^{۲*}، محسن خطیبی نیا^۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۸/۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۹/۱۳

چکیده

در دهه های اخیر به دلیل کاهش بارندگی و به منظور مدیریت منابع آب و پیش بینی های لازم، نیاز به مدل سازی جریان آب زیرزمینی می باشد. در این مدل ها برای کل سیستم، یک رابطه دیفرانسیل در نظر گرفته می شود و توسط روش های عددی متعددی مانند تفاضل محدود، روش اجزای محدود و روش بدون مش حل می گردد. اخیرا از روش جدیدتری به نام روش تحلیل ایزوژئومتریک استفاده می شود. از آنجا که در این روش، از هندسه دقیق مساله به منظور محاسبه توابع پایه استفاده می شود، مشکلات ناشی از شبکه بندی حذف می شود. در این تحقیق رابطه جریان آب زیرزمینی در شرایط ماندگار و غیرماندگار در آبخوان آزاد دشت بیرجند واقع در خراسان جنوبی در یک سال با فاصله زمانی ماهانه مورد مطالعه قرار گرفت. برای حل این رابطه از روش ایزوژئومتریک بر اساس توابع پایه نربز (NURBS) استفاده شد. ابتدا سطح آب زیرزمینی در حالت ماندگار محاسبه گردید و به عنوان جواب اولیه حالت غیرماندگار مورد استفاده قرار گرفت. سپس سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط این روش با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود مقایسه شدند. نتایج مدل سازی نشان داد که روش IGA به لحاظ معیارهای آماری دقت بالاتری از روش تفاضل محدود دارد.

واژه های کلیدی: آبخوان آزاد، توابع پایه نربز، جریان آب زیرزمینی، روش ایزوژئومتریک، شرایط غیر ماندگار

مقدمه

تقریبی بسیاری از مسائل مهندسی است. این روش یک مسئله با بینهایت درجه آزادی را به یک مسئله با درجات آزادی محدود تبدیل کرده تا بدین وسیله حل آن ساده تر شود. در روش اجزای محدود از توابع پایه درون یاب لاگرانژ^۴ و هرمیت^۵ به صورت گسترده ای استفاده شده است که تقریب سازی فضای حل و هندسه با این توابع صورت می گیرد. اما این روش نمی تواند هندسه دقیق یک مدل فیزیکی را برداشت نماید (Mohtashami et al., 2017).

روش تحلیل هم هندسی در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش برای رفع شکاف موجود بین دنیای تحلیل اجزای محدود و مدل سازی کامپیوتری معرفی شد (Hughes et al., 2005). نام این روش برگرفته از مفهوم ایزوپارامتریک در روش المان محدود است. توابع پایه به کار رفته در توصیف دقیق هندسه در تقریب میدان حل نیز به کار گرفته می شوند از این رو این روش تحلیل ایزوژئومتریک^۶ نامیده می شود. فناوری های محاسباتی زیادی وجود دارد که می توان از آن ها به عنوان پایه در تحلیل ایزوژئومتریک استفاده کرد. انتخاب بی اسپلاین^۷ و نربز^۸

حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم از مهم ترین مسائلی است که همواره در زمینه های علوم و مهندسی مورد بحث قرار می گیرد. از آنجا که تنها موارد معدودی از این معادلات را می توان مستقیما با روش های تحلیلی حل نمود، روش های عددی زیادی در چند دهه اخیر برای حل چنین معادلاتی پیشنهاد شده است. روش های عددی با ظهور رایانه ها رشد چشمگیری داشته اند و امروزه به کمک کامپیوترها و این روش ها می توان معادلات بسیار پیچیده در حوزه های متنوع علوم را حل نمود. برخی از روش های عددی معروف عبارتند از روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود، روش نقاط محدود و روش های جدیدتر مانند روش های بدون مش که این روش ها هریک در پی دیگری آمده و به دنبال ایجاد کارایی، دقت، سرعت بالاتر و ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسائل و رفع مشکلات روش های قبلی هستند (Swathi and Eldho., 2014). از پرکاربردترین این روش ها روش اجزای محدود است که روشی عددی برای حل

4- Lagrange

5- Hermite

6- Isogeometric Analysis

7- B-Spline

8- NURBS

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی و مدیریت منابع آب دانشگاه بیرجند

۲- دانشیار گروه مهندسی عمران دانشگاه بیرجند

۳- استادیار گروه مهندسی عمران دانشگاه بیرجند

(Akbarpour@birjand.ac.ir)

* - نویسنده مسئول:

را به دنبال داشت. خصوصیات و مزایای این روش با حل چندین مسئله با خصوصیات مواد مختلف نشان داده شد (Nguyen et al., 2014). بکله و همکاران به مطالعه جریان آب زیرزمینی در حالت ماندگار با استفاده از روش ایزوژئومتریکی با توابع بی اسپلاین بهبود یافته LR در اطراف گوشه غیرقابل نفوذ، در اطراف دیوار آب بند و در یک محیط ناهمگن پرداختند (Bekele et al., 2016). شاهرخ آبادی و همکاران روش ایزوژئومتریکی را برای حل رابطه ریچاردز^۵ جریان غیراشباع در محیط متخلخل استفاده کردند (Shahrokhhabadi et al., 2017).

در سال‌های اخیر مطالعات متعددی روی آبخوان بیرجند صورت گرفته است. صادقی و همکاران برای اولین بار نرخ پمپاژ دبی در چاه های آبخوان را با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه بهینه نمودند (Sadeghi tabas et al., 2016). آن‌ها همچنین با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی فاخته پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان دشت بیرجند را بهینه‌سازی نمودند (صادقی طیس و همکاران ۱۳۹۴). گفتنی است در پژوهشی دیگر به منظور مدیریت بهره‌برداری از سفره آب زیرزمینی یک مدل شبیه ساز - بهینه ساز آب زیرزمینی برای آبخوان بیرجند ارائه کردند (صادقی طیس و همکاران ۱۳۹۴). همراز و همکاران به مدل‌سازی آبخوان بیرجند بر اساس مدل MODFLOW در نرم افزار متلب و بررسی پارامتر عدم قطعیت به روش GLUE پرداختند (Hamraz et al., 2015). سعیدی و همکاران سطح آب زیرزمینی آبخوان دشت بیرجند را با استفاده از کد منبع باز محاسبه کردند. نتایج نشان داد ارتفاع سطح آب زیرزمینی از شرق به غرب و جنوب غربی کاهش می‌یابد (Saeedi et al., 2015). قوچانیان حق‌وردی و همکاران (۱۳۹۱) نیز سطح آب زیرزمینی این آبخوان را با استفاده از مدل‌های MODFLOW و WEAP مدل‌سازی نمودند. محتشمی و همکاران (۱۳۹۶) به مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی توسط روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در شرایط ماندگار در آبخوان دشت بیرجند پرداختند.

هدف از این تحقیق مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در شرایط ماندگار و غیرماندگار در آبخوان آزاد دشت بیرجند با استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریکی می‌باشد که تاکنون در این زمینه تحقیقاتی انجام نشده است. مدل‌سازی در شرایط غیرماندگار برای دوازده بازه زمانی یک ماهه انجام گرفت. به منظور مدل‌سازی، ابتدا فرم ضعیف رابطه جریان آب زیرزمینی در حالت دو بعدی برای هر دو شرایط ماندگار و غیرماندگار مورد نظر ایجاد شد و سپس با استفاده از هندسه آبخوان مورد نظر، توابع پایه بی اسپلاین و نربز و مشتقاتشان محاسبه گردید. ابتدا معادلات پس از اعمال شرایط مرزی در شرایط ماندگار حل گردید و سطح آب زیرزمینی بدست آمده در این شرایط به عنوان

به عنوان پایه اولیه به دلیل کاربرد بودن این فناوری‌های هندسه محاسباتی در طراحی مهندسی می‌باشند (رودسرای، ۱۳۹۳). از پیشگامان بی اسپلاین می‌توان از تلاش‌های یک مهندس فرانسوی به نام، پیر بزیه^۱ در توسعه و معرفی منحنی‌ها و سطوح بزیه در دهه ۱۹۶۰ و اوایل دهه ۱۹۷۰ نام برد. توابع پایه بی اسپلاین بر اساس الگوریتم دی - بور^۲ طی یک رابطه بازگشتی ساخته شده است (Peigl and Tiller., 1997). الگوریتم دی - بور نیز یک الگوریتم پایدار عددی است که در تعیین منحنی‌های اسپلاین در فرم بی اسپلاین به کار می‌رود. یک منحنی بی اسپلاین را می‌توان با تعیین درجه (مرتبه)، نقاط کنترلی^۳ و بردار گرهی^۴ بدست آورد. توابع نربز نیز حالت تعمیم یافته بی اسپلاین‌ها هستند که تفاوت اصلی آن در نسبت دادن وزن به نقاط کنترلی است. نربزها به عنوان یک پایه برای آنالیز نسبت به توابع پایه چند جمله‌ای قطعه قطعه مرسوم به راحتی تعمیم داده می‌شوند و اصلاح می‌گردند و ضمناً قدرت بی نظیری را در میان یک مجموعه وسیع از برنامه‌های کاربردی فراهم کرده‌اند. این قدرت یعنی ترکیب توانایی‌های هندسی و توانایی‌های تحلیلی در بطن آنالیز ایزوژئومتریکی است. به عبارت دیگر ویژگی عمده این روش توانایی حفظ توصیف دقیق یکسانی از هندسه دامنه محاسباتی در سراسر فرآیند تجزیه و تحلیل است (Falco et al., 2011).

از توابع نربز می‌توان به طور وسیع در طراحی گرافیکی، علوم مهندسی و مکانیک محاسباتی استفاده کرد. ونگ و همکاران کد آموزشی متلب برای حل مسائل نوع انتشار بیضوی مانند رابطه پواسون ارائه کردند (Vuong et al., 2010). همچنین فالکو و همکاران یک ابزار نرم افزاری جهت استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریکی برای حل رابطه دو بعدی پواسون تهیه نمودند (Falco et al., 2011). قرشی و همکاران (۱۳۹۰) از مفاهیم روش اجزای محدود توسعه یافته برای تعمیم روش ایزوژئومتریکی برای حل مسائل دو بعدی ترک در محیط همسانگرد استفاده و روابط را بازنویسی کردند. همچنین برای مشخص نمودن کارایی روش پیشنهادی دو مسئله الاستیک حاوی ترک به کمک روش ایزوژئومتریکی و همچنین روش اجزای محدود توسعه یافته مورد تحلیل قرار دادند. حسینی و همکاران (۱۳۹۳) برای ایجاد سطح دقیق روش جدیدی را معرفی کردند. این روش قادر است به سادگی و پس از انجام مجموعه‌ای از مراحل کوتاه، توزیع مناسب نقاط داده و بردار گرهی مشترک را برای ایجاد سطح بی اسپلاین معرفی کند. نوون و همکاران از روش ایزوژئومتریکی برای آنالیز مسائل جریان غیراشباع استفاده کردند. این روش با استفاده از توابع پایه نربز دقت بالاتری در دو حالت خطی و غیرخطی

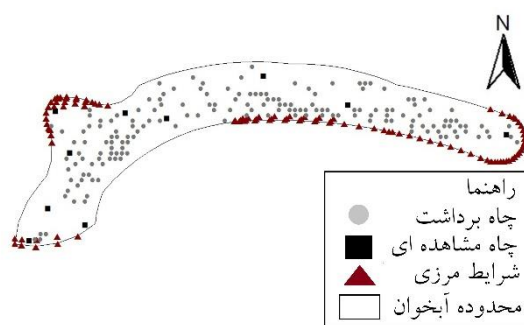
- 1- Bezier
- 2- D-Boor C.R.
- 3- Control Point
- 4- Knot Vector

33°8' شمالی و طول جغرافیایی 58°41' تا 59°44' شرقی در استان خراسان جنوبی قرار گرفته است. مساحت آبخوان ۲۶۵ کیلومتر مربع و متوسط ضخامت اشباع آن ۳۰ متر است. در سطح این آبخوان ۱۹۰ چاه برداشت و ۱۰ چاه مشاهده‌ای قرار گرفته است که موقعیت آن‌ها در شکل ۱ قابل نمایش است. وسعت کل حوضه آبریز حدود ۳۴۰۸ کیلومتر مربع است که ۱۳۸۳ کیلومتر مربع آن دشت و مابقی ارتفاعات است. دشت بیرجند جزو مناطق خشک ایران محسوب می‌شود (Sadeghi tabas et al., 2016).

مقدار اولیه معادلات در حالت غیرماندگار در نظر گرفته و مدل آب زیرزمینی در تمام بازه‌ها محاسبه شد. در انتها در هر بازه زمانی سطح آب زیرزمینی مدل‌سازی شده توسط روش ایزوژئومتری با سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود و سطح آب زیرزمینی مشاهده‌ای مقایسه شد.

منطقه مورد مطالعه

آبخوان دشت بیرجند در محدوده عرض جغرافیایی 32°34' تا



شکل ۱- هندسه آبخوان و شرایط مرزی (بدون مقیاس)

(Peigl and Tiller., 1997)

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } p = 0$$

$$N_{i,0}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad \text{for } p \geq 1 \quad (۴)$$

تابع پایه بی اسپلاین ساخته شده از بردار گرهی باز در هر دو انتهای فضای پارامتریک دارای خاصیت درون‌یابی می‌باشد. مجموعه-ای از توابع پایه بی اسپلاین با خاصیت درون‌یابی در انتهای فضای پارامتری در شکل ۲ قابل مشاهده است (Nguyen et al., 2014)

سطح نریز $S(\xi, \eta)$ ، از درجه p در جهت ξ و در جهت q در جهت η به صورت رابطه ۵ بیان می‌شود.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (۵)$$

که $P_{i,j}$ مختصات نقاط کنترل در دو جهت و $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ توابع پایه دو متغیره نریز هستند و به صورت رابطه ۶ تعریف می‌شوند.

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (۶)$$

که $w_{i,j}$ وزن دوبعدی، $N_{i,p}(\xi)$ و $M_{j,q}(\eta)$ به ترتیب توابع پایه بی اسپلاین از درجه p در جهت ξ و از درجه q در جهت η است. $M_{j,q}(\eta)$ از فرمول‌های ۴ با یک بردار گرهی $\kappa(\eta)$ که خصوصیتی شبیه بردار گرهی $\kappa(\xi)$ دارد، قابل محاسبه است.

تحلیل ایزوژئومتری

منحنی نریز، $C(\xi)$ ، از درجه p ترکیبی خطی از توابع پایه نریز است، به طوری که ضرایب آن مجموعه‌ای از نقاط کنترل داده شده است (Peigl and Tiller., 1997).

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) P_i \quad (۱)$$

که n تعداد نقاط کنترل، P_i مختصات نقاط کنترل و $R_{i,p}(\xi)$ توابع پایه نریز است و از رابطه ۲ بدست آمد.

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (۲)$$

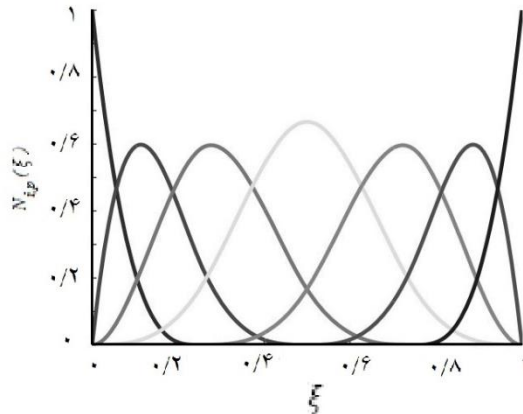
که $w_{i,j}$ وزن غیر صفر اختصاص داده شده به i و j از امین نقطه کنترل، $N_{i,p}(\xi)$ نیز تابع پایه بی اسپلاین تک متغیره از درجه p ، در جهت ξ است. برای ساخت مجموعه‌ای از توابع پایه بی اسپلاین از درجه p بردار گرهی $\kappa(\xi)$ با توالی غیرکاهشی از اعداد حقیقی در فضای پارامتری، $\xi \in [0,1]$ ، مطابق رابطه ۳ تعریف شد.

$$\kappa(\xi) = \left\{ \xi_1 = 0, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1} = 1 \right\} \quad (۳)$$

که ξ_i i امین گره است.

اگر گره‌ها در ابتدا و انتهای بردار گرهی $p+1$ بار تکرار شوند، بردار گرهی باز نامیده می‌شود. در آنالیز جهت ارضای ویژگی دلتای کرونکر در نقاط مرزی و اعمال مستقیم شرایط مرزی ضروری در این نقاط، عموماً بردار گرهی باز استفاده می‌شود (Nguyen et al., 2014).

با داشتن بردار گرهی، تابع پایه بی اسپلاین تک متغیره $N_{i,p}(\xi)$ توسط رابطه بازگشتی کاکس-دی بور طبق رابطه ۴ محاسبه می‌شود



شکل ۲- توابع پایه بی اسپلاین ساخته شده با بردار گرهی باز $\kappa(\xi) = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$ (Nguyen et al. 2014)

-محاسبه نقاط و مشتقاتش روی منحنی و سطح

-تقسیم‌بندی منحنی و سطح

-اضافه کردن نقاط کنترل به منظور افزایش انعطاف پذیری در سطح کنترل (طراحی دقیق‌تر و جذاب) (Peigl and Tiller., 1997)

بدین منظور اگر خواسته شود گره $\xi \in [\kappa_k, \kappa_{k+1}]$ به $\kappa(\xi)$ اضافه شود، i امین نقطه کنترل جدید در r امین مرحله افزودن گره با $Q_{i,r}$ نمایش داده و طبق رابطه ۹ قابل محاسبه است.

$$Q_{i,r} = \alpha_i Q_{i,r-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i-1,r-1} \quad (9)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & i \leq k - p + r - 1 \\ \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p-r+1} - \xi_i}, k - p + r \leq i \leq k - s \\ 1 & i \geq k - s + 1 \end{cases}$$

که k اندیس بازه دربرگیرنده گره اضافه شده، p درجه توابع پایه، s تعداد تکرار گره اضافه شده در بردار گرهی است.

گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان دو بعدی

معادلات جریان آب زیرزمینی در حالت ماندگار

رابطه مستقل از زمان حاکم بر جریان در منطقه ایزوتروپ دو بعدی Ω با مرز کلی $\Gamma \equiv \partial\Omega$ به صورت رابطه ۱۰ قابل تعریف است:

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x H \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y H \frac{\partial H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z H \frac{\partial H}{\partial z}) = R \quad (10)$$

که k_x, k_y, k_z مولفه‌های تانسور هدایت هیدرولیکی و H بار پتانسیل در هر نقطه (x, y, z) و R مولفه تغذیه‌کننده و یا تخلیه‌کننده (به ترتیب با علامت مثبت یا منفی) آبخوان است. در آبخوان‌های آزاد تغییر ضخامت لایه اشباع با تغییر ارتفاع سطح آب زیرزمینی همراه است. برای حل رابطه جریان در این حالت دوپوی در سال ۱۸۶۳ فرضیاتی را در نظر گرفت که عبارتند از (Dupuit., 1863).

الف) جریان افقی است.

مشتقات توابع پایه بی اسپلاین با استفاده از توابع پایه بی اسپلاین درجه پایین‌تر قابل محاسبه است، که البته به دلیل بازگشتی بودن روابط ۴ بدیهی است. مشتق درجه i ام برای یک چند جمله‌ای از درجه p و بردار گرهی $\kappa(\xi)$ به صورت رابطه ۷ قابل تعریف است:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

با مشتق‌گیری پی در پی از هر سمت رابطه ۷ مشتقات بالاتر به صورت رابطه ۸ بدست آمد.

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (8)$$

در حضور نقاط تکراری مخرج کسر بعضی از ضرایب فوق ممکن است صفر شود. هر زمان که این اتفاق افتاد مقدار این ضرایب کلا صفر در نظر گرفته شد (Cottrell et al., 2009). خصوصیات توابع پایه نرَبز به صورت زیر بیان شده است:

$$\sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) = 1 \text{ - جزئی از واحد بودن؛}$$

$$R_{i,p}(\xi) \geq 0 \text{ - نامنفی بودن،}$$

-توابع پایه درجه $p - m_i$ ، p بار قابلیت مشتق‌پذیری پیوسته روی گره ξ_i دارند که m_i تعداد تکرار گره ξ_i در بردار گرهی است.

-پشتیبانی محلی: این خاصیت نشان دهنده پشتیبانی $R_{i,p}(\xi)$ در بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ است. در سه بعدی، تعداد توابع پایه غیر صفر برای یک بازه گرهی خاص برابر $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$ است. بنابراین تعداد کل نقاط کنترل هر المان برابر $n_{en} = (p+1) \times (q+1) \times (r+1)$ است (Nguyen et al., 2014).

افزودن گره یکی از مهم‌ترین الگوریتم‌های بی اسپلاین است. برخی از کاربردهای آن عبارتند از:

$$[f] = \int_{\Omega} \varphi_i R d\Omega$$

$$\{d\} = \{H^2\} \quad (22)$$

ماتریس بار یا f نشان دهنده میزان تخلیه و تغذیه در آبخوان است. که این تخلیه و تغذیه، دبی‌های گسترده و متمرکز برداشتی از سفره و یا ورودی به سفره هستند.

$$[f] = \int_{\Omega} \varphi_i R d\Omega = -Q_K - \int_{\Omega} \varphi_i q d\Omega \quad (23)$$

که Q_K دبی متمرکز چاه k ام و q دبی گسترده همچون بارندگی یا تبخیر است.

معادلات جریان آب زیرزمینی در حالت غیرماندگار

رابطه ۲۴ رابطه جریان آب زیرزمینی که براساس فرضیات دپویی و رابطه پیوستگی در شرایط وجود جریان دو بعدی و غیرماندگار در آبخوان آزاد استخراج گردیده است.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{S_y \partial H}{\partial t} \pm R \quad (24)$$

از آنجا که:

$$\frac{\partial H^2}{\partial x} = 2H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (25)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه ۲۵ در رابطه ۲۴ بدست آمد:

$$k \left[\left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) \right] = 2 \times \left(\frac{S_y \partial H}{\partial t} \pm R \right) \quad (26)$$

با استفاده از روش حداقل باقیمانده‌های وزنی اجزاء محدود و استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء رابطه ۲۶ را به صورت رابطه ۲۷ گسسته شد.

$$k \left(\int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right) = 2 \iint_{\Omega} W_i \frac{S_y \partial H}{\partial t} d\Omega + 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (27)$$

از آنجا که در آبخوان دشت بیرجند جریان نرمال که از مرز آبخوان وارد و یا خارج شود، وجود ندارد، جملات اول و سوم سمت چپ رابطه ۲۷ برابر صفر هستند.

$$-k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \iint_{\Omega} W_i \frac{S_y \partial H}{\partial t} d\Omega + 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه ۲۵ در رابطه ۲۸، رابطه ۲۹ بدست آمد.

$$-2k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} H \frac{\partial H}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} H \frac{\partial H}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \iint_{\Omega} W_i \frac{S_y \partial H}{\partial t} d\Omega + 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (29)$$

(ب) شیب هیدرولیکی مساوی شیب سطح آزاد است.

رابطه‌ای که بر اساس فرضیات دپویی و رابطه پیوستگی در شرایط وجود جریان دوبعدی و ماندگار استخراج گردیده است به صورت رابطه ۱۱ است.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = R \quad (11)$$

از آنجا که:

$$\frac{\partial H^2}{\partial x} = 2H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (12)$$

رابطه ۱۳ با جایگزینی رابطه ۱۱ در رابطه ۱۲ بدست آمد

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) = 2R \quad (13)$$

با در نظر گرفتن آبخوان همگن ($k_x = k_y$) رابطه به فرم رابطه ۱۴ ساده شد.

$$k \left[\left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) \right] = 2R \quad (14)$$

رابطه ۱۴ به روش حداقل باقیمانده‌های وزنی اجزاء محدود به صورت رابطه ۱۵ گسسته سازی شد.

$$\int_{\Omega} W_i k \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) d\Omega = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (15)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء رابطه به رابطه ۱۶ ساده شد:

$$k \left[\int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \times \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \times \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (16)$$

در آبخوان دشت بیرجند جریان نرمال وارد یا خارج شده از مرز آبخوان (شرایط مرزی نیومان) صفر است لذا رابطه به رابطه ۱۷ تبدیل شد.

$$-k \left[\int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \times \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \times \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه ۱۲ در رابطه ۱۷، رابطه ۱۸ محاسبه شد.

$$-2k \left[\int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} H \frac{\partial H}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} H \frac{\partial H}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (18)$$

تخمین عددی تابع H ترکیبی خطی به صورت رابطه (۱۹) است:

$$H = \sum_{i=1}^n H_i \varphi_i(x, y) \quad (19)$$

که $\varphi_i(x, y)$ همان توابع پایه هستند. پس از جایگذاری رابطه ۱۹ در فرم ضعیف رابطه ۱۸ و با در نظر گرفتن $W_i = \varphi_i$ برای $i=1, \dots, n$ سیستم خطی رابطه ۲۰ حاصل شد.

$$k \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} d\Omega \right] H^2 = \int_{\Omega} \varphi_i R d\Omega \quad (20)$$

که ماتریس سختی K، بردار f و بردار مجهولات به ترتیب مطابق روابط ۲۰-۲۲ قابل تعریف است.

$$[k] = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} d\Omega \quad (21)$$

است، این ماتریس دبی‌های گسترده و متمرکز برداشتی و یا ورودی به سفره هستند. جمله دوم سمت راست رابطه ۳۵ دبی متمرکز (چاه) و جمله سوم سمت راست دبی گسترده همچون بارندگی و یا تبخیر در واحد سطح است.

تعریف متغیرهای مسئله جریان آب زیرزمینی

برای تعریف توابع پایه مورد استفاده در آنالیز ایزوژئومتری یک ابتدا باید درجه این توابع بر حسب هندسه آبخوان تعریف شود. در این مسئله جریان دو بعدی، درجه توابع پایه در جهت ξ برابر ۳ و در جهت η برابر ۲ و در جهت ζ برابر ۱۶ و در جهت y برابر ۷ در نظر گرفته شد. تعداد اعضای بردار گرهی بر اساس فرمول $n+p+1$ که n تعداد نقاط کنترلی و p درجه تابع پایه است- در جهت ξ ۲۰، و در جهت η برابر ۱۰ بدست آمد. بردار گرهی‌های مربوطه به صورت روابط (۳۶) و (۳۷) تعریف شد:

$$\kappa(\xi) = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1 \right\} \quad (36)$$

$$\kappa(\eta) = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1 \right\} \quad (37)$$

مش کنترلی ایجاد شده در آبخوان در شکل (الف-۳) قابل مشاهده است. برای ریزتر کردن المان‌ها باید از تکنیک افزودن گره استفاده نمود. بردار گرهی جدید در هر دو جهت تعریف و نقاط کنترل جدید توسط رابطه ۹ محاسبه شد. نقاط کنترلی نهایی و المان‌های ایجاد شده در شکل (ب-۳) قابل نمایش است. با اضافه کردن گره‌های جدید، تعداد نقاط کنترلی از ۱۱۲ نقطه به ۱۲۷۴ نقطه و تعداد المان‌ها از ۱۵ به ۸۳۶ افزایش یافت.

با در نظر گرفتن ترکیب خطی رابطه ۳۰ برای تخمین عددی تابع H و جایگزینی آن در رابطه ۲۹ و با در نظر گرفتن $W_i = \varphi_i$ برای $i=1, \dots, n$ رابطه ۳۱ بدست آمد.

$$H = \sum_{i=1}^n H(t) \times \varphi(x, y) \quad (30)$$

$$-2k \left(\iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} H^{n+1} \times H^n \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} H^{n+1} \times H^n \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega \right) + 2 \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} \right) d\Omega + 2 \iint_{\Omega} \varphi_i R d\Omega \quad (31)$$

با مرتب کرن رابطه ۳۱، رابطه ۳۲ که همان شکل رابطه خطی است ایجاد شد.

$$\left[-2k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} H^n \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} H^n \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega \right] - 2 \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) d\Omega \right] \times H^{n+1} = -2 \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega + 2 \iint_{\Omega} \varphi_i R d\Omega$$

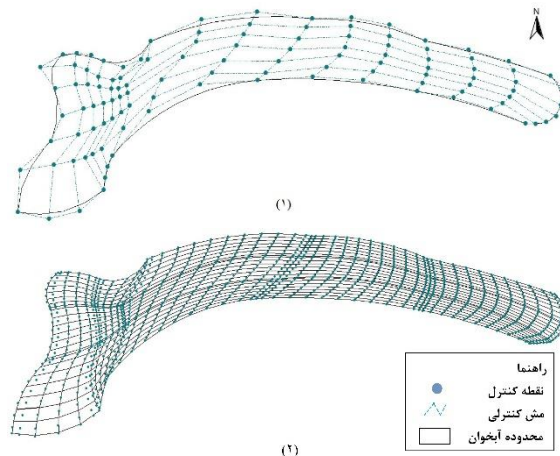
ماتریس‌های سختی، مجهولات و بار به ترتیب در روابط ۳۳ و ۳۴ و ۳۵ قابل تعریف هستند.

$$[K] = k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} H^n \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} H^n \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega \right] + \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) d\Omega \quad (33)$$

$$[U] = H^{n+1} \quad (34)$$

$$[F] = \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega - \iint_{\Omega} \varphi_i R d\Omega \quad \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega - Q_K - \iint_{\Omega} \varphi_i q d\Omega \quad (35)$$

ماتریس بار در رابطه ۳۵ مشخص کننده میزان تخلیه و تغذیه



شکل ۳-الف-مش کنترلی اولیه ۳-ب-نقاط کنترل نهایی و المان بندی نهایی هندسه آبخوان (بدون مقیاس)

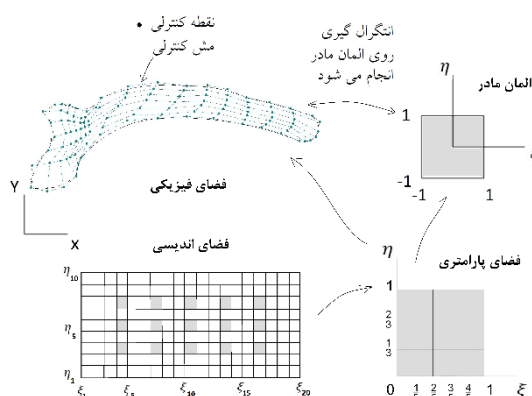
آنالیز ایزوژئومتری با چهار فضا سرو کار دارد که عبارتند از: فضای اندیسی، فضای پارامتری، المان مادر و فضای فیزیکی که برای مسئله مورد نظر در شکل ۴ قابل نمایش است. در مسئله جریان دو بعدی، از انتگرال گیری گوس چهار نقطه استفاده شد که مختصات نقاط گوسی در جدول ۱ بیان شده است.

برای انجام نگاشت اول هم می توان مختصات نقاط گوسی را به فضای پارامتری انتقال داد و هم می توان بازه های گرهی را متناسب با مختصات نقاط گوسی در نظر گرفت. حال برای محاسبه ماتریس سختی از رابطه ۲۰ و ۳۳ و انجام انتگرال گیری، لازم است مشتقات با نگاشتی بین سیستم مختصات کلی و فضای پارامتری نیز انتقال یابند. این عمل با استفاده از ماتریس ژاکوبین معرفی شده در رابطه ۳۸ که مشتقات در دو سیستم مختصات است، انجام گرفته است.

جدول ۱- مختصات نقاط گوسی و ضرائب وزن آن ها

مختصات نقاط	ضرائب وزن
-۰/۸۶۱۱۳۶۳۱۲	۰/۳۴۷۸۵۴۸۴۵
-۰/۳۳۹۹۸۱۰۴۴	۰/۶۵۲۱۴۵۱۵۵
۰/۳۳۹۹۸۱۰۴۴	۰/۶۵۲۱۴۵۱۵۵
۰/۸۶۱۱۳۶۳۱۲	۰/۳۴۷۸۵۴۸۴۵

بدین منظور نیاز به یک نگاشت از توابع پایه بر روی المان مادر



شکل ۴- شرح تصویری اجزاء نرئز برای سطح آبخوان فرضی مورد نظر

$$\frac{\partial R}{\partial y} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (41)$$

در نتیجه ماتریس سختی المان در حالت ماندگار و غیرماندگار به ترتیب توسط معادلات ۴۲ و ۴۳ قابل محاسبه است.

$$K = \iint_{\Omega} k \cdot B^T \cdot B \det J \, d\xi \, d\eta \quad (42)$$

$$(43) K = \iint_{\Omega} k \cdot B_1 \cdot B \det J \, d\xi \, d\eta + \iint_{\Omega} R_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \det J \, d\xi \, d\eta$$

که ماتریس B و B₁ به صورت رابطه های ۴۴ و ۴۵ قابل تعریف است.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial R}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}_{2 \times (m \times n)} \quad (44)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \times H^n & \frac{\partial R}{\partial y} \times H^n \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{(m \times n) \times 2} \quad (45)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (38)$$

که مولفه های آن توسط رابطه ۳۹ قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial R}{\partial \xi} \quad (39)$$

که مشتقات تابع پایه نرئز بوده و به راحتی توسط مشتقات توابع پایه بی اسپلاین از رابطه ۷ قابل محاسبه است. پس از محاسبه ژاکوبین، مشتقات توابع پایه نرئز نسبت به x, y توسط روابط ۴۰ و ۴۱ محاسبه شد.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (40)$$

آبخوان ۱۹۰ حلقه چاه وجود دارد که موقعیت آن‌ها در شکل ۱ با نماد دایره قابل مشاهده است.

مقادیر تغذیه و تخلیه

در آبخوان بیرجند مقدار بارندگی با توجه به اقلیم خشک منطقه بسیار کم است و همین مقدار بارندگی به عنوان تغذیه در نظر گرفته شده است. بارندگی برای این آبخوان بر اساس داده‌های ایستگاه باران‌سنجی دشت بیرجند در سال ۱۳۹۱-۱۳۹۰ برابر با ۰/۰۰۷۲۷ متر بر روز اندازه‌گیری شده است. میزان تخلیه از آبخوان برابر مقادیر برداشتی از چاه‌ها در واحد زمان است.

هدایت هیدرولیکی k و ضریب آبدهی ویژه Sy

اطلاعات هدایت هیدرولیکی و ضریب آبدهی ویژه در آبخوان دشت بیرجند توسط نرم افزار GIS به چندین تیسن همگن (چندضلعی) تقسیم‌بندی شد که هر تیسن یک عدد هدایت هیدرولیکی مشخص را دارا است (فرپور، ۱۳۹۵). المان‌های نریز ایجاد شده با توجه به اینکه در کدام تیسن قرار گرفته است، عدد تیسن مربوطه به همان چندضلعی به آن اختصاص یافت. مقادیر هدایت هیدرولیکی و ضریب آبدهی ویژه در هر چندضلعی در شکل ۵ و ۶ نشان داده شده است. واحد تمامی اعداد هدایت هیدرولیکی متر بر روز است.

بردار نیرو در تمامی نقاط بجز نقاط مرزی از روابط ۲۳ و ۲۵ محاسبه شد. برای اعمال هد ارتفاعی در بردار نیرو به روش مستقیم، با یک ترفند عددی، هدهای موجود را بدون حذف معادلات آن‌ها اعمال شد. بدین گونه که ضریب قطری متناظر نقطه کنترلی مرزی در ماتریس سختی را در 10^{10} ضرب نمود و ضریب متناظرش در بردار نیرو را نیز برابر مقدار زیر قرار داد (Wang and Anderson., 1982):

$$F_i = 10^{10} K_{i,i} u_i ; i \in \Gamma_D \quad (46)$$

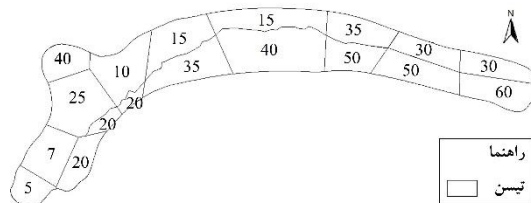
پس از محاسبه بردار نیرو و ماتریس سختی، ماتریس مجهولات برای نقاط کنترلی محاسبه شد. برای محاسبه هد آب زیرزمینی در نقاط کنترلی به پنج زیرمجموعه از اطلاعات نیاز است: شرایط مرزی، چاه‌های برداشت، میزان تغذیه و تخلیه در آبخوان و مقادیر هدایت هیدرولیکی و ضریب آبدهی ویژه.

شرایط مرزی

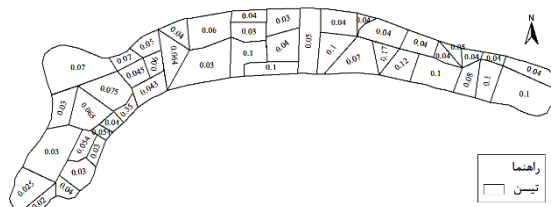
در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی همواره دو نوع شرط مرزی وجود دارد: شرایط مرزی با هد ثابت (دریشت) و شرایط مرزی با جریان ثابت (نیومان) (Park and Leap., 2000). در آبخوان دشت بیرجند شرایط مرزی با هد ثابت در نظر گرفته شد. نقاط مرزی با هد ثابت در شکل ۱ نمایش داده شده است.

چاه‌های برداشت

از طریق چاه‌های آبخوان، برداشت صورت گرفته است. در این



شکل ۵- هدایت هیدرولیکی آبخوان (بدون مقیاس) (فرپور ۱۳۹۵)



شکل ۶- ضریب آبدهی ویژه آبخوان (بدون مقیاس)

توضیحات ذکر شده در متلب بدست آمد. مطابق رابطه خطی معرفی شده در بخش ۴ ماتریس مجهولات برای نقاط کنترلی محاسبه و با جذر گرفتن از ماتریس مجهولات، ارتفاع سطح آب زیرزمینی برای

نتایج

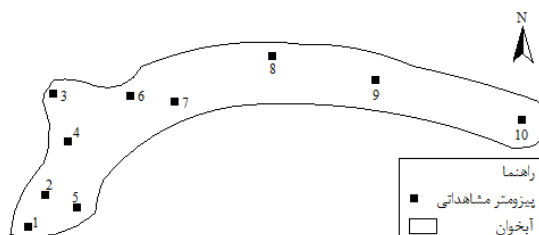
پس از ساخت هندسه توسط نقاط کنترلی و بردار گرهی و محاسبه توابع نریز و مشتقات آن، ماتریس سختی و بردار نیرو، مطابق

روش تفاضل محدود مقایسه شد. در جدول ۲ نتایج این مقایسه نشان داده شده است. قابل ذکر است که پیژومترهای مشاهده‌ای در شکل ۷ با نماد مستطیل مشخص شده‌اند. هم‌چنین در شکل ۸ مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریک و تفاضل محدود به صورت نموداری قابل نمایش است.

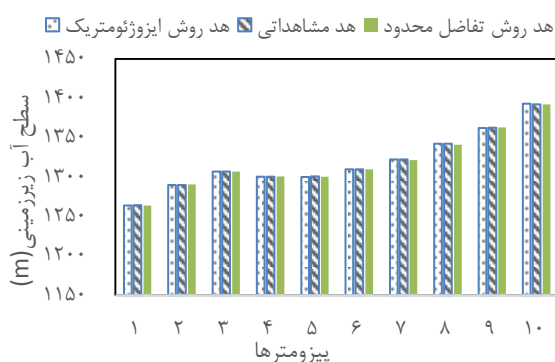
نقاط کنترل مربوطه محاسبه شد. به منظور اطمینان از صحت مدل سازی با این روش، مقادیر سطح آب زیرزمینی بدست آمده با مقادیر سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در پیژومترهای آبخوان مقایسه شد. بدین منظور سطح آب زیرزمینی بدست آمده از مدل در نقاط نزدیک به پیژومترها درون یابی و با مقادیر مشاهداتی پیژومتر مربوطه و نتایج

جدول ۲- مقایسه نتایج مدل و مشاهداتی در حالت ماندگار

ردیف	نتایج روش IGA(m)	سطح آب در		خطای نسبی روش IGA	خطای نسبی روش FDM
		پیژومتر (m)	نتایج روش FDM (m)		
1	1263/79	1264/30	۱۲۶۳/۸۹۵	0/0004	-/۰۰۰۳
2	1289/83	1290	۱۲۹۰/۵۷۲	0/0001	-/۰۰۰۴
3	1306/91	1306/87	۱۳۰۶/۸۸۱	0/0003	۰/۰۰۰۰۰۸
4	1300/50	1300/43	۱۲۹۶/۷۴۵	0/00005	-/۰۰۰۲۸
5	1299/96	1300/77	۱۳۰۰/۵۵	0/0006	-/۰۰۰۲
6	1309/74	1309/98	۱۳۰۹/۸۷۴	0/0002	۰/۰۰۰۰۸
7	1322/47	1322/41	۱۳۲۱/۸۰۶	0/00005	-/۰۰۰۰۵
8	1342/38	1342/24	۱۳۴۱/۳۴۷	0/0001	-/۰۰۰۰۷
9	1362/48	1362/9	۱۳۶۲/۹۵۵	0/0003	۰/۰۰۰۰۴
10	1393/15	1392/2	۱۳۹۲/۴۴۹	0/0007	-/۰۰۰۰۲



شکل ۷- موقعیت چاه‌های مشاهده‌ای در آبخوان بیرجند (بدون مقیاس)



شکل ۸- مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریک و تفاضل محدود

خطای نسبی روش ایزوژئومتریک مطابق داده‌های موجود در جدول، برابر $0/۰۰۰۲۶$ است در حالیکه مقدار این خطا برای روش تفاضل محدود برابر $0/۰۰۰۵۳$ است. پس از تایید نتایج مدل در حالت ماندگار،

در جدول ۲ مشخص است که سطح آب زیرزمینی مدل سازی شده توسط روش ایزوژئومتریک در مقایسه با روش تفاضل محدود، به سطح آب زیرزمینی مشاهداتی نزدیک تر است. هم‌چنین میانگین

و خطای نسبی محاسبه شد. جدول ۳ و ۴ مقایسه نتایج در ماه ۲ و ۱۰ را بعنوان نمونه نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های ۹ تا ۱۲ مقایسه نتایج مدل‌سازی با نتایج حاصل از مدل‌سازی را در پی‌نمودهای ۳، ۵، ۸ و ۱۰ نشان می‌دهد.

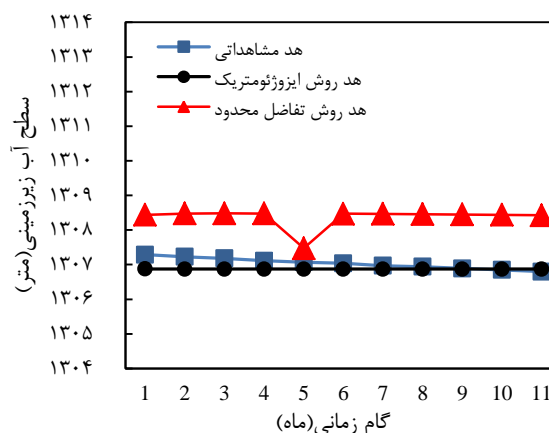
با داشتن ارتفاع آب زیرزمینی اولیه محاسبه شده در حالت ماندگار، ماتریس سختی و بردار نیرو در حالت غیرماندگار مطابق رابطه‌های ۳۳ و ۳۵، با اعمال شرایط مرزی برای هر دوازده ماه محاسبه گردید. سطح آب زیرزمینی بدست آمده در هر ماه با سطح آب زیرزمینی مشاهده‌ای در پی‌نمودهای آبخوان مربوط به آن ماه مقایسه

جدول ۳- مقایسه نتایج مدل و مشاهداتی ماه ۲ در حالت غیرماندگار

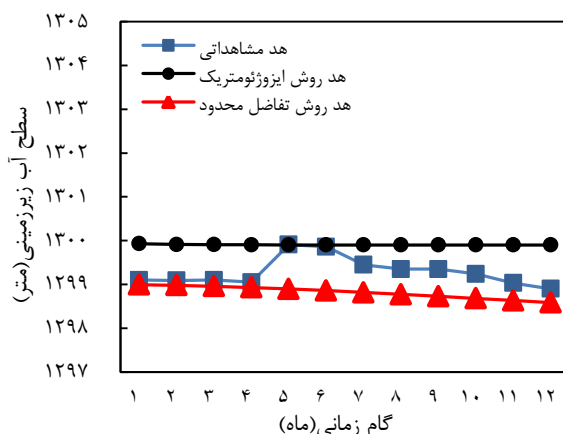
ردیف	نتایج روش IGA(m)	سطح آب در		نتایج روش FDM (m)	خطای نسبی روش IGA	خطای نسبی روش FDM
		پیزومتر (m)	خطای نسبی روش IGA			
1	۱۲۶۳/۶۸	۱۲۶۴/۰۸	۰/۰۰۰۳۲	۱۲۶۳/۳۴	۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۰۰۳۶
2	۱۲۸۹/۴۲	۱۲۸۹/۶۷	۰/۰۰۰۲	۱۲۹۰/۱۴	۰/۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۳۶
3	۱۳۰۶/۸۷	۱۳۰۷/۲۳	۰/۰۰۰۲۷	۱۳۰۸/۴۷	۰/۰۰۰۹۵	۰/۰۰۰۹۵
4	۱۳۰۰/۱۰	۱۳۰۰/۴۳	۰/۰۰۰۲۶	۱۲۹۷/۹۲	۰/۰۰۱۹۳	۰/۰۰۱۹۳
5	۱۲۹۹/۹۱	۱۲۹۹/۰۹	۰/۰۰۰۶۳	۱۲۹۸/۹۸	۰/۰۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۸
6	۱۳۰۹/۲۴	۱۳۱۰/۴۳	۰/۰۰۰۹۱	۱۳۱۱/۹۳	۰/۰۰۱۱۵	۰/۰۰۱۱۵
7	۱۳۲۱/۴۷	۱۳۲۲/۷	۰/۰۰۰۹۳	۱۳۲۱/۴۹	۰/۰۰۰۹۲	۰/۰۰۰۹۲
8	۱۳۴۲/۰۷	۱۳۴۲/۶۳	۰/۰۰۰۴۲	۱۳۴۳/۶۳	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۷۵
9	۱۳۶۲/۴۰	۱۳۶۳/۲۴	۰/۰۰۰۶۲	۱۳۶۳/۸۵	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۰۴۵
10	۱۳۹۳/۱۳	۱۳۹۳/۸	۰/۰۰۰۲۴	۱۳۹۴/۱۵	۰/۰۰۰۹۷	۰/۰۰۰۹۷

جدول ۴- مقایسه نتایج مدل و مشاهداتی ماه ۱۰ در حالت غیرماندگار

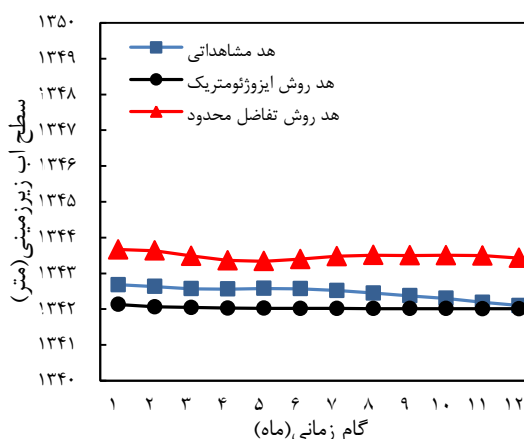
ردیف	نتایج روش IGA(m)	سطح آب در		نتایج روش FDM (m)	خطای نسبی روش IGA	خطای نسبی روش FDM
		پیزومتر (m)	خطای نسبی روش IGA			
1	۱۲۶۳/۶۰	۱۲۶۴/۲۲	۰/۰۰۰۴۹	۱۲۶۳/۵۸	۰/۰۰۰۵۱	۰/۰۰۰۵۱
2	۱۲۸۹/۲۲	۱۲۹۰/۲۴	۰/۰۰۰۷۹	۱۲۹۰/۷۲	۰/۰۰۱۱۵	۰/۰۰۱۱۵
3	۱۳۰۶/۸۷	۱۳۰۶/۸۵	۰/۰۰۰۰۲	۱۳۰۸/۴۴	۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۰۱۲۲
4	۱۳۰۰/۱۰	۱۳۰۰/۳۴	۰/۰۰۰۱۹	۱۲۹۶/۸۱	۰/۰۰۲۷۱	۰/۰۰۲۷۱
5	۱۲۹۹/۹۰	۱۲۹۹/۲۴	۰/۰۰۰۵۱	۱۲۹۸/۶۸	۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۴۳
6	۱۳۰۹/۲۸	۱۳۰۹/۸۰	۰/۰۰۰۴	۱۳۱۱/۰۸	۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۰۰۹۸
7	۱۳۲۱/۴۹	۱۳۲۲/۴۰	۰/۰۰۰۶۹	۱۳۲۳/۷۲	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱
8	۱۳۴۲/۰۱	۱۳۴۲/۳۰	۰/۰۰۰۲۱	۱۳۴۳/۵۰	۰/۰۰۰۸۹	۰/۰۰۰۸۹
9	۱۳۶۲/۳۶	۱۳۶۳/۷۹	۰/۰۰۰۳۱	۱۳۶۳/۵۷	۰/۰۰۰۵۷	۰/۰۰۰۵۷
10	۱۳۹۳/۱۲	۱۳۹۳/۲۱	۰/۰۰۰۶۵	۱۳۹۳/۸۷	۰/۰۰۱۱۹	۰/۰۰۱۱۹



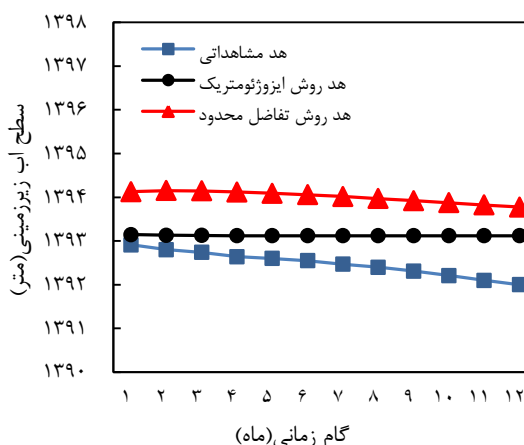
شکل ۹- مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریک و تفاضل محدود در پی‌نمود ۳



شکل ۱۰- مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریکی و تفاضل محدود در پیژومتر ۵



شکل ۱۱- مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریکی و تفاضل محدود در پیژومتر ۸



شکل ۱۲- مقایسه سطوح آب زیرزمینی در سه حالت مشاهداتی، محاسباتی توسط روش ایزوژئومتریکی و تفاضل محدود در پیژومتر ۱۰

توسط روش ایزوژئومتریکی و روش تفاضل محدود و سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در حالت ماندگار و غیرماندگار، قدرت بالای روش عددی به کار گرفته شده را نشان داد.

همانطور که از شکل‌ها و جداول پیدا است، نتایج روش ایزوژئومتریکی به نتایج مشاهداتی نزدیک‌تر بوده و خطای نسبی بدست آمده با این روش در مقایسه با روش تفاضل محدود بسیار کمتر است. لذا می‌توان از مقایسه سطح آب زیرزمینی مدل‌سازی شده

ارزیابی عملکرد مدل

برای تشخیص عملکرد مدل از خطاهای میانگین، میانگین مطلق و جذر میانگین مربعات استفاده شد. این خطاها در شرایط ماندگار و غیرماندگار به ترتیب از روابط ۴۷ تا ۴۹ و ۵۰ تا ۵۳ محاسبه شد.

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^n (h_o - h_s)}{n} \quad (47)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |h_o - h_s|}{n} \quad (48)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_o - h_s)^2}{n}} \quad (49)$$

$$ME = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_o - h_s)}{m \times n} \quad (50)$$

$$MAE = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |h_o - h_s|}{m \times n} \quad (51)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_o - h_s)^2}{m \times n}} \quad (52)$$

که در آن h_o و h_s به ترتیب سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و مدل سازی شده است و n بیانگر تعداد پیزومترها و m تعداد گام زمانی ماهانه است (Sadeghi tabas et al., 2016). نتایج خطاهای مذکور برای روش های ایزوژئومتریکی و روش تفاضل محدود در شرایط ماندگار و غیرماندگار به ترتیب در جدول ۵ و ۶ آورده شده است.

جدول ۵- محاسبه خطاهای میانگین، مطلق میانگین و جذر حداقل مربعات حالت ماندگار

روش FDM	روش IGA	
۰/۳۲۱	۰/۰۹	خطای میانگین (متر)
۰/۴۰۴	۰/۳۴	خطای مطلق میانگین (متر)
۰/۵۶۶	۰/۴۵۹	خطای جذر میانگین مربعات (متر)

جدول ۶- محاسبه خطاهای میانگین، مطلق میانگین و جذر حداقل مربعات حالت غیرماندگار

روش FDM	روش IGA	
۰/۱۵۹	۰/۳۵۵	خطای میانگین (متر)
۱/۴۳۴	۰/۳۴	خطای مطلق میانگین (متر)
۱/۱۹۷	۰/۷۱۱	خطای جذر میانگین مربعات (متر)

دانست.

بیان آب زیرزمینی آبخوان بیرجند با استفاده از مقادیر ورودی، برداشت ها و ذخیره آب در دشت محاسبه شد. با استفاده از مدل بدست آمده در این پژوهش، بیان دشت بیرجند برای شرایط ماندگار در جدول ۷ ارائه شده است. طبق جدول ۷ اختلاف ناچیزی میان دبی ورودی و خروجی وجود دارد.

زمانی که مقدار خطای RMSE در بازه $\pm 1/9$ متر قرار داشته باشد، مقدار خطا قابل قبول است (Anderson et al., 2015). با توجه به مقادیر جدول ۶ مقدار خطاها قابل قبول است. اختلاف خطای جذر میانگین مربعات دو روش در حالت ماندگار و غیرماندگار به ترتیب برابر برابر $0/107$ و $0/486$ متر است. این میزان اختلاف با توجه به مساحت آبخوان حجم قابل توجهی است. لذا می توان روش ایزوژئومتریکی را روشی کارا و دقیق در مدلسازی جریان آب زیرزمینی

جدول ۷- بیان دشت مدل بدست آمده از روش ایزوژئومتریکی در شرایط ماندگار

دبی ورودی (MCM)	دبی خروجی (MCM)		
۲۰۵/۱۷۲	ذخیره	۱۷۰/۸۴۹	ذخیره
۳۶/۷	هد ثابت	۱۸/۹۳	هد ثابت
۰	چاه ها	۷۹/۴۴	چاه ها
۲۸/۶۲	تغذیه	۰	تغذیه
۲۷۰/۳۶	جمع	۲۶۹/۲۳۹	جمع

آبخوان آزاد دشت بیرجند واقع در خراسان جنوبی با استفاده از روش عددی ایزوژئومتریکی (IGA) انجام شد. در مدل سازی هندسه و در آنالیز ایزوژئومتریکی از روش توابع پایه یکسان استفاده کرد. این روش

نتیجه گیری

مدل سازی جریان آب زیرزمینی یکی از اساسی ترین کارها جهت مطالعات عمیق بر روی آبخوان ها می باشد. در این مطالعه مدل سازی

رودسرایی، م. ۱۳۹۳. بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با استفاده از توابع پایه بی‌اسپلاین و روش منحنی تراز، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند.

صادقی طبس، ص.، اکبرپور، ا.، پوررضا بیلندی، م. و صمدی، سیده زهرا. ۱۳۹۴. کاربرد الگوریتم فاخته در واسنجی پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان با استفاده از مدل ریاضی، مجله آبیاری و زهکشی. ۳۵۶-۲:۳۴۵-۹.

صادقی طبس، ص.، اکبرپور، ا.، پوررضا بیلندی، م. و صمدی، سیده زهرا. ۱۳۹۴. ارائه مدل شبیه‌ساز-بهینه‌ساز چند هدفه کمی بهره‌بردار از آبخوان به منظور تعیین سیاست برداشت بهینه، مجله آبیاری و زهکشی. ۴۶۹-۳:۴۶۹-۹.

فرپور، ا. ۱۳۹۵. ارزیابی کیفیت آب زیرزمینی دشت بیرجند با استفاده از مدل MT3D، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند.

قرشی، س. ش.، شجاعی، س.، ولی زاده، ن. و قاسم زاده، ح. ۱۳۹۰. تعمیم روش عددی ایزوژئومتریکی برای حل مسائل دو بعدی دارای ترک در محیط همسانگرد به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، سمنان.

قوچانیان حق وردی، ا.، اعتباری، ب. و اکبرپور، ا. ۱۳۹۱. مدیریت آب-های زیرزمینی با استفاده از تلفیق مدل‌های WEAP و MODFLOW، سومین همایش ملی مدیریت جامع منابع آب، ساری.

محتشمی، ع.، اکبرپور، ا. و ملازاده، م. ۱۳۹۶. مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالات ماندگار به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، مهندسی مکانیک مدرس. ۱۷: ۴۰۳-۳۹۳.

Bekele, Y.W., Kvamsdal, T., Kvarving, A.M., Nordal, S. 2016 Adaptive isogeometric finite element analysis of steady-state groundwater flow. *International Journal of Numerical Analysis Methods in Geomechanics*. 40:738-765.

Cottrell, J., Hughes, T., Bazilevs, Y. 2009. *Isogeometric Analysis: toward Integration of CAD and FEA*. First published, WILEY, West Sussex, U.K.

Dupuit, J. 1863. *Estudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux*, Dunod, Paris.

Falco, C.de., Reali, A., Vazquez, R. 2011. *GeoPDEs: A Research tool for Isogeometric Analysis of PDEs*. *Advanced in Engineering Software*. 42: 1020-1034.

Hamraz, B.S., Akbarpour, A., Pourreza Bilondi, M., Sadeghi tabas, S. 2015. On the assessment of groundwater parameter uncertainty over an arid aquifer. *Arabian journal of geosciences*. 8.12:10759-

فرآیند المان‌بندی و اصلاح آن را راحت‌تر کرده است. استفاده از این روش علاوه بر حذف مشکلات بوجود آمده ناشی از المان‌بندی‌های متعدد در میدان حل، امکان مدل‌سازی را برای مسائل با هندسه نامنظم و پیچیده را نیز فراهم ساخت. پس از ایجاد هندسه و محاسبه توابع پایه نربز (NURBS) و مشتقات آن‌ها، با ورود اطلاعات اولیه همچون هدایت هیدرولیکی، شرایط مرزی، دبی‌های برداشت و میزان تخلیه و تغذیه مدل آب زیرزمینی در حالت ماندگار ایجاد و سطح آب زیرزمینی برای هر نقطه کنترل محاسبه گردید. به منظور نشان دادن کارایی روش ایزوژئومتریکی، سطح آب زیرزمینی به دست آمده از مدل با سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود و سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در پیژومترها مقایسه و خطای نسبی این روش‌ها محاسبه گردید. نتایج بدست آمده رضایت بخش و قابل قبول بود. پس از تایید مدل در حالت ماندگار، نتایج مدل به عنوان جواب اولیه مدل در حالت غیرماندگار استفاده شد. در نهایت سطح آب زیرزمینی بدست آمده از مدل در هر بازه زمانی با سطح آب زیرزمینی مشاهده‌ای و سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط روش تفاضل محدود مقایسه گردید. در تمام بازه‌های زمانی، سطح آب زیرزمینی مدل‌سازی شده توسط روش IGA در مقایسه با روش تفاضل محدود، به سطح آب زیرزمینی مشاهداتی نزدیک‌تر بود. نتایج مدل‌سازی ارتفاع آب زیرزمینی در آبخوان دشت بیرجند نشان داد که روش ایزوژئومتریکی در مقایسه با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده دقت بالاتری دارد. هم‌چنین مقایسه نتایج روش ایزوژئومتریکی و تفاضل محدود بر مبنای معیارهای آماری، نشان داد که روش ایزوژئومتریکی عملکرد بهتری از روش تفاضل محدود دارد. بنابراین، روش ایزوژئومتریکی می‌تواند به طور قابل اعتمادی در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در شرایط ماندگار و غیرماندگار استفاده شود.

پیشنهادها

جهت تکمیل کار پژوهشی، می‌توان از روش‌های بهبود یافته مانند افزودن درجه، بهینه‌سازی بردار گرهی و ... جهت کاهش خطای مدل‌سازی استفاده کرد. هم‌چنین با استفاده از توابع پایه دیگری مانند T-spline می‌توان نتایج را با روش پیشنهاد شده مقایسه کرد. هم‌چنین از ترکیب روش ایزوژئومتریکی با روش‌های بهینه‌سازی می‌توان پارامترهای هیدرودینامیکی را بهینه کرد.

منابع

حسینی، س.ف.، معتکف ایمانی، ب.، حدیدی‌مود، س. ۱۳۹۳. ایجاد سطوح نرم بی-اسپلاین از طریق بهبود آرایش نقاط داده، مجله مهندسی مکانیک مدرس. ۱۴: ۱۳: ۲۷-۳۶.

- algorithms. *Journal of Hydroinformatics*. 18.5: 1-18.
- Saeedi,H., Baqvand,A., Nikosokan,M.H., Akbarpour .A., Sadeghi tabas,S. 2015. Prediction of one year trend of changes in water table using open source code; A case study of Birjand plain, Southern Khorasan province. *International Bulletin of Water Resource and Development*. 3: 67-75.
- Shahrokhbabadi,Sh., Vahedifard,F., Bhatia,M. 2017. Head-based isogeometric analysis of transient flow in unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*. 84: 183-197.
- Swathi,B., Eldho,T.I. 2014. Groundwater flow simulation in unconfined aquifers using meshless local Petrov-Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 48: 43-52.
- Vuong,A.V., Henrich,Ch. Simeon,B. 2010. ISOGAT: A 2D tutorial MATLAB Code for Isogeometric Analysis. *Computer Geometric Design*. 27: 644-655.
- Wang,H., Anderson,M. 1982. *Introduction to Groundwater Modeling; Finite Difference and Finite Element*. Academic Press. San Diego.
- Anderso,M., Woessner,W., Hunt,R. 2015. *Applied Groundwater Modeling*, 2nd ed., Academic Press. 10773.
- Hughes,T.J.R., Cottrell,J.A., Bazilevs,Y. 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite element, NURBS, exact geometry, and mesh refinement. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*. 194.39-41: 4135-4195.
- Mohtashami,A., Akbarpour,A., Mollazadeh,M. 2017. Development of two dimensional groundwater flow simulation model using meshless method based on MLS approximation function in unconfined aquifer in transient state. *Journal of Hydroinformatics*. In press.
- Nguyen,M.N., Bui,T.Q. Hirose,T.Y.S. 2014. Isogeometric analysis for unsaturated flow problems. *Computer and Geotechnics*. 62: 257-267.
- Park,Y.C., Leap,D. 2000. Modeling groundwater flow with a free and moving boundary using the element-free Galerkin (EFG) method. *Geoscience Journal*. 4.3: 243-249.
- Peigl,L., Tiller,W. 1997. *The NURBS Book*. 2nd edition. Springer, NewYork.
- Sadeghi tabas,S., Samadi,S.Z., Akbarpour,A., Pourreza Bilondi,M. 2016. Sustainable groundwater modeling using single-and multi-objective optimization

Development of a Two-Dimensional Groundwater Flow Model Using the IGA Method in Unconfined Aquifer

M. Kalantari¹, A. Akbarpour^{2*} and Mohsen Khatibinia³

Received: Oct.30, 2017

Accepted: Dec.04, 2017

Abstract

In recent decades, groundwater flow modeling is required due to reduced rainfall and the management of water resources and predictions. In these models, a differential equation is considered for the whole system which can be solved by several numerical methods such as finite difference, finite element method, and meshless method. Recently, a newer method called the isogeometric analysis method is used. Because in this method, the exact geometry of the problem is used to calculate the base functions, the problems caused by the meshing are eliminated. In this research, groundwater flow equation was studied in steady-state and transient conditions in the unconfined aquifer of Birjand plain in South Khorasan in a year with a monthly interval. To solve this equation, Isogeometric analysis (IGA) method based on the non-uniform rational B-spline (NURBS) basic functions were used. The first, groundwater level was calculated in a steady state and was used as the initial solution of transient state. Then, the groundwater level of the computational was compared with the groundwater level of observations and groundwater level calculated by the finite difference method. The results of modeling showed that the IGA method in terms of statistical criteria has a higher accuracy than the finite difference method.

Keywords: Groundwater flow, Unconfined aquifer, Transient Condition, IGA method, NURBS Basis Function

1-M.Sc. Student, Water Resources Engineering, University of Birjand

2- Associate Professor of Civil Engineering, University of Birjand

3-Assistant Professor of Civil Engineering, University of Birjand

(*-Corresponding Author Email: Akbarpour@Birjand.ac.ir)